Øystein Døhl og Jan Larsson

Faste versus stokastiske heterogenitetskoeffisienter i ubalansert datasett ved analyse av teknologiforskjeller mellom bedrifter

Rapporter I denne serien publiseres statistiske analyser, metode- og modellbeskrivelser fra de enkelte forsknings- og statistikkområder. Også resultater av ulike enkeltundersøkelser publiseres her, oftest med utfyllende kommentarer og analyser.

Reports This series contains statistical analyses and method and model descriptions from the different research and statistics areas. Results of various single surveys are also published here, usually with supplementary comments and analyses.

ISBN 82-537-4961-9
ISSN 0806-2056

Emnegruppe
12.90 Metoder, modeller, dokumentasjon

Design: Enzo Finger Design
Trykk: Statistisk sentralbyrå/280

Standardtegn i tabeller	Symbols in tables	Symbol
Tall kan ikke forekomme	Category not applicable	.
Oppgave mangler	Data not available	..
Oppgave mangler foreløpig	Data not yet available	...
Tall kan ikke offentliggjøres	Not for publication	:
Null	Nil	-
Mindre enn 0,5 av den brukte enheten	Less than 0.5 of unit employed	0
Mindre enn 0,05 av den brukte enheten	Less than 0.05 of unit employed	0,0
Foreløpig tall	Provisional or preliminary figure	*
Brudd i den loddrette serien	Break in the homogeneity of a vertical series	—
Brudd i den vannrette serien	Break in the homogeneity of a horizontal series	|
Rettet siden forrige utgave	Revised since the previous issue	r

Sammendrag

Øystein Døhl og Jan Larsson

Faste versus stokastiske heterogenitetskoeffisienter i ubalansert datasett ved analyse avteknologiforskjeller mellom bedrifter

Rapporter 2001/21 • Statistisk sentralbyrå 2001

Et vanlig problem innenfor økonometri er hvordan man skal forholde seg til heterogenitet. I denne studien har vi sett på to ulike metoder for modellering av heterogenitet mellom bedrifter. En metode går ut på å legge inn bedrifts-spesifike parametre hvor man antar at forskjellene mellom bedriftene ligger. Den andre metoden går ut på å anta at forskjellen mellom bedriftene følger en sannsynlighetsfordeling. Den første metoden kan legge stort beslag på antall frihetsgrader dersom det er mange bedrifter og/eller vi ønsker å legge inn heterogenitet på flere plan. Den andre metoden er langt mer parameterbesparende, men her er valg av sannsynlighetsfordeling et kritisk punkt. Hvordan man modellerer heterogeniteten, enten med faste eller stokastiske koeffisienter, synes å ha betydning når det gjelder estimatenes presisjon (effisiens). Resultatene indikerer at modellen med faste bedriftsspesifikke koeffisienter gir mer effisiente estimater. Studien viser at valg av metode for å modellere heterogenitet har liten innvirkning på de estimerte resultatene, deriblant elastisitetene, men å ikke ta hensyn til heterogenitet kan gi alvorlige estimeringsproblemer.

Prosjektstøtte: Prosjektet er finansiert av Norges forskningsråd under SAMRAM-programmet. Takk til Terje Skjerpen og Erik Biørn for god hjelp og verdifulle kommentarer.

Innhold

1. Innledning

Et vanlig problem innenfor økonometri er hvordan man skal forholde seg til heterogenitet. Uansett hvilke mikroøkonometriske studier man skal gjøre vil man støte på heterogenitetsproblematikken. Heterogenitet kan kort oppsummeres til hva som er forskjellene og likhetene mellom de enheter[1] vi studerer, og hvordan modellere dette. Man kan selvsagt også tenke seg heterogenitet over tid[2] og ikke bare mellom bedrifter, men her har vi valgt å studere heterogenitet mellom bedrifter og antatt homogenitet over tid.

Hvor omfattende vi tror heterogeniteten er, vil påvirke oss i valget av hvor detaljert modellering av heterogenitet vi gjør. Den ene ytterlighet er å anta at alle bedriftene er totalt forskjellig på alle måter. Da velger man å estimere en funksjon eller et sett av funksjoner for hver bedrift. Vi vil imidlertid fort kunne oppdage at å estimere en funksjon for hver bedrift legger restriksjoner på modellutvalget vi kan bruke, da denne "restriksjonen"[3] kan gi oss for mange parametre å estimere i forhold til datasettet vi har til rådighet. Den andre ytterlighet er å anta at alle bedriftene er like i alle henseende. Man vil da estimere en felles funksjon for alle bedriftene. Selv om heterogenitet er et viktig problem så skal ikke modellvalg styres av heterogenitetsproblemer, men av hvilke problemer vi ønsker å studere.

Hvordan bør vi modellere heterogenitet? En mulighet er å legge inn faste koeffisienter på de parametre hvor man antar at forskjellene mellom bedriftene ligger. En annen mulighet er å anta at forskjellen mellom bedriftene følger en eller annen sannsynlighetsfordeling. Den første metoden kan legge stort beslag på antall frihetsgrader dersom det er mange bedrifter og/eller vi ønsker å legge inn heterogeniteten på flere plan. Det andre metoden er langt mer parameterbesparende, men vi kan komme i skade for å velge feil sannsynlighets-fordeling, eller "trekke" feil utfra "riktig" sannsynlighetsfordelning. I denne studien skal vi se på begge ovenfornevnte metoder, og undersøke hvilken tilnærming som egner seg best på vårt datasett. Næringen vi har valgt å studere er de masseproduserende bedrifter innenfor treforedlingssektoren. Til slutt vil vi sammenligne valg av fremgangsmåte og hvilken betydning det har for elastisitetene. Elastisiteten er viktig for effekten av de politikvalg som gjøres.

[1] Da våre studier er mikrostudier av bedrifter, er resten av teksten den studerte enhet eksemplifisert med "bedriften".

[2] Autokorrelasjon er en form for heterogenitet over tid.

[3] "Forutsetning" om at alle bedrifter er ulike.

2. Modell

Heterogeniteten mellom bedriftene kan ligge på mange plan. Vi antar at mye ligger i teknologi-forskjeller. I denne sammenheng er teknologi et vidt begrep og det omfavner mer enn bare forskjeller i kapitalutstyr. Det kan blant annet innbefatte forskjellig kunnskapsnivå i arbeidsstokken og/eller ulik bedriftsledelse. For å analysere problemet har vi valgt å spesifisere for bedriftene en Generalisert Leontief (GL) profitt-funksjon.

2.1. Profittfunksjon

Om vi forutsetter at bedriftene er profittmaksimerende og alle priser bestemmes av markedet, da kan bedriftenes maksimeringsproblem defineres som:

$$\text{2.1)}\quad \begin{aligned} &\pi(p,v,K,t) = Maks_u\{py - vx\} \\ &y \geq 0 \\ &x_i \geq 0 \\ &(y,x,K) \in T \end{aligned}$$

Der π er den variable profitten (bruttoinntekten minus variable kostnader), y er produksjonen, p produkt-prisen som er gitt av markedet, x er en vektor av alle variable innsatsfaktorer og v en vektor av faktorprisene også gitt av markedet, K er kapital som betraktes som en kvasifiks innsatsfaktor[4], samt en tidstrendparameter t som skal fange opp den tekniske utviklingen over tid. T er en mulig produksjonsmengde. Bedriftenes problem er da å finne den mengden av produksjon og den mengden av hver variabel innsatsfaktor som maksimerer den variable profitten. For å garantere at det finnes dualitet med en mulig produksjonsmengde og den variable profittfunksjonen, må følgende vilkår for profittfunksjonen være oppfylt:

a) En ikkenegativrealverdi funksjon for alle p og v >>0 og hver x.
b) Homogen av grad en i p og v.
c) Konveks og kontinuerlig i hver fast x og y.
d) Ikke minkende i p og ikke økende i v.

[4] Gitt på kort sikt.

Denne riktige profittfunksjonen er ikke kjent, men kan approksimeres med en annen grads taylorutvikling. Flere fleksible funksjonsformer er utviklet som aproksimeringer, blant annet translog (Christensen, Jorgensen, Lau, 1971) og den normaliserte kvadrerte (Lau, 1978). Vi har imidlertid valgt en generalisert leontief profittfunksjon (GL) (Diewert 1973). Den kan med visse modifikasjoner skrives som:

$$\text{2.2)}\quad \begin{aligned} \pi = {} & \beta_0 + \delta_p p + \sum_i^m \sum_j^m \beta_{ij}\sqrt{v_i}\sqrt{v_j} + \sum_i^m \delta_i \sqrt{p}\sqrt{v_i} \\ & + \beta_t t + \beta_k K + \beta_{kk} K^2 + \beta_{tt} t^2 + 2\beta_{kt} Kt \\ & + \delta_k pK + \delta_t pt + \sum_i^m \beta_{ki} v_i K + \sum_i^m \beta_{ti} v_i t \end{aligned}$$

der v_i er prisen på innsatsfaktor i, p er prisen på sluttproduktet, K er å betrakte som en kvasi-fixed kapitalmengde, mens t er en tidsparameter som tar hensyn til generelle teknologiske forbedringer[5].

Om den variable profittfunksjonen oppfyller vilkårene over kan, ifølge Hotellings lemma, produsert mengde være gitt ved

$$\text{2.3)}\quad \frac{\partial \pi}{\partial p} = \mathrm{Y} = \delta_p + \frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^m \delta_i \sqrt{v_i}}{\sqrt{p}} + \delta_t t + \delta_K K\ .$$

Dersom vi skriver ut 2.3) for hver av de fire innsatsfaktorene elektrisitet (E), annet brensel (F), arbeidskraft (L) og annet materiale (M) får vi

$$\text{2.3.a)}\quad \begin{aligned} &\frac{\partial \pi}{\partial p} = \mathrm{Y} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{p}}\left(\delta_E\sqrt{v_E} + \delta_F\sqrt{v_F} + \delta_L\sqrt{v_L} + \delta_M\sqrt{v_M}\right) \\ &\quad \delta_p + +\delta_t t + \delta_K K \end{aligned}$$

[5] Teknologiske forbedringer kan her være både tekniske og organisatoriske forbedringer.

Faktoretterspørselen er gitt ved

2.4) $\frac{\partial \pi}{\partial v_i} = \text{-X}_\text{i}$

$$= \beta_{ii} + \frac{\sum_{j\neq i}^{m} \beta_{ij}\sqrt{v_j}}{\sqrt{v_i}} + \frac{1}{2}\delta_i \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{v_i}} + \beta_{ti}t + \beta_{Ki}K$$

2.4a) $\frac{\partial \pi}{\partial v_E} = \text{-X}_\text{E}$

$$= \beta_{EE} + \frac{\beta_{EF}\sqrt{v_F} + \beta_{EL}\sqrt{v_L} + \beta_{EM}\sqrt{v_M}}{\sqrt{v_E}}$$
$$+ \frac{1}{2}\delta_E \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{v_E}} + \beta_{tE}t + \beta_{KE}K$$

2.4b) $\frac{\partial \pi}{\partial v_F} = \text{-X}_\text{F}$

$$= \beta_{FF} + \frac{\beta_{EF}\sqrt{v_E} + \beta_{FL}\sqrt{v_L} + \beta_{FM}\sqrt{v_M}}{\sqrt{v_F}}$$
$$+ \frac{1}{2}\delta_F \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{v_F}} + \beta_{tF}t + \beta_{KF}K$$

2.4c) $\frac{\partial \pi}{\partial v_L} = \text{-X}_\text{L}$

$$= \beta_{LL} + \frac{\beta_{EL}\sqrt{v_E} + \beta_{FL}\sqrt{v_F} + \beta_{LM}\sqrt{v_M}}{\sqrt{v_L}}$$
$$+ \frac{1}{2}\delta_L \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{v_L}} + \beta_{tL}t + \beta_{KL}K$$

2.4d) $\frac{\partial \pi}{\partial v_E} = \text{-X}_\text{M}$

$$= \beta_{MM} + \frac{\beta_{EM}\sqrt{v_E} + \beta_{FM}\sqrt{v_F} + \beta_{LM}\sqrt{v_L}}{\sqrt{v_M}}$$
$$+ \frac{1}{2}\delta_M \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{v_M}} + \beta_{tM}t + \beta_{KM}K$$

Fra tilbuds- og faktoretterspørselsfunksjonene kan vi utlede output- og input-priselastisitetene. I fra 2.3) har vi at

2.5) $$\frac{\partial Y}{\partial p} = -\frac{1}{4}\frac{\sum_{i=1}^{m}\delta_i\sqrt{v_i}}{p\sqrt{p}}$$

Outputpriselastisiteten følger da som

2.6) $$El_{Yp} \equiv \frac{\partial Y}{\partial p}\frac{p}{Y} = -\frac{1}{4}\frac{\sum_{i=1}^{m}\delta_i\sqrt{v_i}}{p\sqrt{p}}\frac{p}{Y} = -\frac{1}{4}\frac{\sum_{i=1}^{m}\delta_i\sqrt{v_i}}{Y\sqrt{p}}.$$

Fra 2.4) har vi

2.7) $$\frac{\partial X_i}{\partial v_i} = -\frac{1}{2}\frac{\sum_{j\neq i}^{m}\beta_{ij}\sqrt{v_j}}{v_i\sqrt{v_i}} - \frac{1}{4}\delta_i\frac{\sqrt{p}}{v_i\sqrt{v_i}}$$
$$= -\frac{2\sum_{j\neq i}^{m}\beta_{ij}\sqrt{v_j} + \delta_i\sqrt{p}}{4v_i\sqrt{v_i}}$$

Input-priselastisiteten følger da som

2.8) $$El_{X_i v_i} \equiv \frac{\partial X_i}{\partial v_i}\frac{v_i}{X_i} = -\frac{2\sum_{j\neq i}^{m}\beta_{ij}\sqrt{v_j} + \delta_i\sqrt{p}}{4v_i\sqrt{v_i}}\frac{v_i}{X_i}$$
$$= -\frac{2\sum_{j\neq i}^{m}\beta_{ij}\sqrt{v_j} + \delta_i\sqrt{p}}{4X_i\sqrt{v_i}}$$

På tilsvarende måte kan vi også beregne krysspris-elastisitetene og output- faktorelastisitetene med hensyn på kapital og tid.

2.2. Økonometrisk spesifikasjon

Faktoretterspørselsfunksjonene og tilbudsfunksjonen gitt fra ligning 2.3) og 2.4) kan skrives på kompakt form som

2.9) $y_{(ip)t} = x_{(ip)t}\beta + \alpha + \mu_{(ip)t}$, $i=1,\dots,N_p$, $p=1,\dots,P$ og $t=1,\dots,p$

Hvor vi antar:

2.10) $x_{(ip)t}$ og $\mu_{(ip)t}$ er stokastisk uavhengige og

2.11) $\mu_{(ip)t} \sim \text{IID}(0_{G,1}, \Omega^{\mu})$, IID står for uavhengig, identisk normalfordelt, hvor $0_{m,n}$ er en m×n null matrise som angir forventningsverdi og G er antall ligninger i systemet. I vårt tilfelle er G=5, og hvor

$$2.12)\quad \Omega^{\mu}=\begin{bmatrix}\sigma_{11}^{\mu} & \cdots & \sigma_{1G}^{\mu}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \sigma_{G1}^{\mu} & \cdots & \sigma_{GG}^{\mu}\end{bmatrix}$$

Denne måten å skrive varianskomponentene til restleddene på, det at ikke alle tall som ikke ligger på hoveddiagonalen er null, åpner for muligheten for at restleddene for samme bedrift og samme periode i forskjellige ligninger kan være korrelerte. Men innenfor hver ligning er feilkomponentene homoskedastiske og ikke autokorrelerte.

Siden vi benytter oss av et ubalansert datasett har vi gruppert bedriftene etter hvor mange år de har eksistert, slik at hvert delutvalg består av et balansert utvalg. Fotskrift $(ip)t$ er bedrift i som er observert i p år i periode t, N_p er antall bedrifter N observert i p år. I balanserte datasett er det ofte vanlig at t løper fra første observasjonsår til siste observasjonsår, hvor siste observasjonsår ofte benevnes med T. Det er viktig å notere seg at her kan fotskrift t[6] indikere forskjellige årstall. Eller sagt på en annen måte, siden datasettet går over perioden 1972-1993 kan t indikere for eksempel 1972 for en bedrift mens den kan indikerer 1985 for en annen.

I henhold til 2.3) og 2.4) kan vektorene og matrisen i 2.9) i vårt tilfelle skrives som

$$2.13)\quad y=\begin{bmatrix}Y\\ -X_E\\ -X_F\\ -X_L\\ -X_M\end{bmatrix},\quad \mu=\begin{bmatrix}\mu_Y\\ \mu_E\\ \mu_F\\ \mu_L\\ \mu_M\end{bmatrix},\quad \alpha=\begin{bmatrix}\delta_p\\ \beta_{EE}\\ \beta_{FF}\\ \beta_{LL}\\ \beta_{MM}\end{bmatrix}$$

$$\beta=\begin{bmatrix}\beta_{EF}\\ \beta_{EL}\\ \beta_{EM}\\ \beta_{FL}\\ \beta_{FM}\\ \beta_{LM}\\ \delta_E\\ \delta_F\\ \delta_L\\ \delta_M\\ \beta_{tE}\\ \beta_{tF}\\ \beta_{tL}\\ \beta_{tM}\\ \beta_{KE}\\ \beta_{KF}\\ \beta_{KL}\\ \beta_{KM}\\ \delta_t\\ \delta_k\end{bmatrix},\quad x'=\begin{bmatrix}
0 & \frac{\sqrt{v_F}}{\sqrt{v_E}} & \frac{\sqrt{v_E}}{\sqrt{v_F}} & 0 & 0\\
0 & \frac{\sqrt{v_L}}{\sqrt{v_E}} & 0 & \frac{\sqrt{v_E}}{\sqrt{v_L}} & 0\\
0 & \frac{\sqrt{v_M}}{\sqrt{v_E}} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{v_E}}{\sqrt{v_M}}\\
0 & 0 & \frac{\sqrt{v_L}}{\sqrt{v_F}} & \frac{\sqrt{v_F}}{\sqrt{v_L}} & 0\\
0 & 0 & \frac{\sqrt{v_M}}{\sqrt{v_F}} & & \frac{\sqrt{v_F}}{\sqrt{v_M}}\\
0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{v_M}}{\sqrt{v_L}} & \frac{\sqrt{v_L}}{\sqrt{v_M}}\\
\frac{1}{2}\frac{\sqrt{v_E}}{\sqrt{p}} & \frac{1}{2}\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{v_E}} & 0 & 0 & 0\\
\frac{1}{2}\frac{\sqrt{v_F}}{\sqrt{p}} & 0 & \frac{1}{2}\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{v_F}} & 0 & 0\\
\frac{1}{2}\frac{\sqrt{v_L}}{\sqrt{p}} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{v_L}} & 0\\
\frac{1}{2}\frac{\sqrt{v_M}}{\sqrt{p}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{v_M}}\\
0 & t & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & t & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & t & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & t\\
0 & K & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & K & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & K & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & K\\
t & 0 & 0 & 0 & 0\\
K & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Det finnes p (p=1,.....,P) x, y og μ vektorer for hver bedrift i (i=1,......N_p). Dette betyr at Ω^{μ} gitt ved 2.12) i vårt tilfelle kan skrives som

$$2.14)\quad \Omega^{\mu}=\begin{bmatrix}
\sigma_{YY}^{\mu} & \sigma_{YE}^{\mu} & \sigma_{YF}^{\mu} & \sigma_{YL}^{\mu} & \sigma_{YM}^{\mu}\\
\sigma_{EY}^{\mu} & \sigma_{EE}^{\mu} & \sigma_{EF}^{\mu} & \sigma_{EL}^{\mu} & \sigma_{EM}^{\mu}\\
\sigma_{FY}^{\mu} & \sigma_{FE}^{\mu} & \sigma_{FF}^{\mu} & \sigma_{FL}^{\mu} & \sigma_{FM}^{\mu}\\
\sigma_{LY}^{\mu} & \sigma_{LE}^{\mu} & \sigma_{LF}^{\mu} & \sigma_{LL}^{\mu} & \sigma_{LM}^{\mu}\\
\sigma_{MY}^{\mu} & \sigma_{ME}^{\mu} & \sigma_{MF}^{\mu} & \sigma_{ML}^{\mu} & \sigma_{MM}^{\mu}
\end{bmatrix}$$

Ligning 2.9)-2.11) kan skrives på en mer kompakt form ved å slå sammen de p observasjonene for bedrift (ip).

$$2.15)\quad y_{(ip)}=x_{(ip)}\beta+\alpha_{(ip)}^{H}+\mu_{(ip)}$$

$$\text{hvor}\quad y_{(ip)}=\begin{bmatrix}y_{(ip)1}\\ \vdots\\ y_{(ip)p}\end{bmatrix},\quad x_{(ip)}=\begin{bmatrix}x_{(ip)1}\\ \vdots\\ x_{(ip)p}\end{bmatrix}\quad \text{og}\quad \mu_{(ip)}=\begin{bmatrix}\mu_{(ip)1}\\ \vdots\\ \mu_{(ip)p}\end{bmatrix}$$

[6] Som må skilles fra trendparameteren t.

For at α nå skal ha samme dimensjon som de andre vektorene må vi sette

$$2.16)\quad \alpha^H_{(ip)} = \left\lfloor e_{(ip)} \otimes \alpha \right\rfloor$$

Hvor $\alpha^H_{(ip)}$ er en ($Gp\times1$) vektor og $e_{(p)}$ er en ($p\times1$) enhetsvektor. Det er viktig å notere seg at slik som $\alpha^H_{(ip)}$ er uttrykt i 2.16) så indikerer det *ikke* at $\alpha^H_{(ip)}$ er bedriftsspesifikk, da alle elementene er lik for alle bedrifter. Under skal vi se hvordan vi kan modifisere 2.16) til å gjøre modellen bedriftsspesifikk.

Det følger fra 2.10), 2.11) og 2.15) at

$$2.17)\quad \mu_{(ip)} \sim \mathrm{IID}(0_{G,1}, \Omega^\mu_{(ip)}),$$

hvor

$$2.18)\quad \Omega^\mu_{(ip)} = \mathrm{I_p} \otimes \Omega^\mu = \begin{bmatrix} \Omega^\mu & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Omega^\mu & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Omega^\mu \end{bmatrix},$$

Siden I_p er en $p\times p$ identitetsmatrise og Ω^μ er en $G\times G$ matrise impliserer det at $\Omega^\mu_{(ip)}$ er en $Gp\times Gp$ matrise.

I vårt tilfelle er $\sum_{p=1}^{P} N_p = 45$ og $P=22$ (1972-1993), det er ikke opplagt at $P=22$ da det er mulig at ingen bedrifter er observert i samtlige år. Denne måten å gruppere data på gjør det viktig å modellere heterogeniteten riktig. La oss illustrere dette med det enkleste eksemplet. Ta to bedrifter (la oss kalle dem $i=1$ og $i=2$) som bare eksisterer i ett år ($p=1$), den ene eksisterer bare i 1972 og den andre bare i 1993 (i henhold til notasjon over vil de hhv. ha fotskrift (11)1 og (21)1). Disse to bedriftene vil bli gruppert i samme delutvalg selv om det er over tjue års eksistenstid mellom dem, og det vil derfor trolig være stor heterogenitet med hensyn på teknologi mellom dem. En annen ting som er viktig å få med seg er at dersom forskjellen mellom bedriftene *bare* skyldes at de eksisterer i ulike tidsperioder, dvs. alle bedriftene som eksisterer innenfor samme år er homogene, mens vi har en form for heterogenitet mellom bedrifter som eksisterer i ulike tidsperioder, så vil denne "generelle" forskjellen fanges opp av trendvariabelen t, i 2.3) og 2.4). Dette er et uttrykk for generell teknologisk endring.

Vi vil studere tre ulike antagelser om heterogeniteten. I modell A beskrevet i avsnitt 2.2.3, antar vi fravær av heterogenitet. I modell B beskrevet i avsnitt 2.2.4, antar vi at heterogenitetskoeffisientene er faste. Mens vi i modell C beskrevet i avsnitt 2.2.4, antar at heterogenitetskoeffisientene er stokastiske. Vi antar at heterogeniteten kan modelleres som bedriftsspesifikke koeffisienter i parametrene δ_p, β_{EE}, β_{FF}, β_{LL} og β_{MM}. Dette innebærer at i ligning 2.3) og 2.4) er konstantleddene bedriftsspesifikk.

2.2.1. Homogene bedrifter

Vi skal først se på tilfelle hvor vi antar at alle bedriftene er homogene. Det vil si at vi antar at bedriftene innenfor samme næring er så like med hensyn på teknologi at det i estimeringssammenheng ikke vil være noe å tjene på å modellere heterogenitet. Denne modellen kan betraktes som en basismodell i forhold til det modifikasjoner vi gjør nedenfor. Og vil senere blir referert til som modell A.

Vi estimerer modellen over slik den er beskrevet i 2.15)-2.16) gitt vektorene i 2.13) simultant ved bruk av sannsynlighetsmaksimering.

Tetthetsfunksjonen (som er felles for alle bedriftene) for restleddet $\mu_{(ip)}$, betinget med hensyn på $x_{(ip)}$ for bedrift (ip) er gitt ved

$$2.19)\quad f_{(ip)} = (2\pi)^{-\frac{Gp}{2}} \left|\Omega^\mu_{(ip)}\right|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\mu'_{(ip)} {\Omega^\mu_{(ip)}}^{-1} \mu_{(ip)}\right]$$

Ved å ta logaritmen til 2.19) og sette 2.15) inn i 2.19) får vi at log-likelihood funksjonen for bedrift (ip) er gitt ved

$$2.20)\quad \ln(L_{(ip)}) = -\frac{Gp}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln\left|\Omega^\mu_{(ip)}\right| - \frac{1}{2}\left[y_{(ip)} - x_{(ip)}\beta - \alpha^H_{(ip)}\right]' {\Omega^\mu_{(ip)}}^{-1}\left[y_{(ip)} - x_{(ip)}\beta - \alpha^H_{(ip)}\right]$$

Fordi observasjonene fra bedriftene er uavhengige, fremkommer den betingede log-likelihood funksjonen for alle bedrifter ved å summere 2.20)

$$2.21)\quad L = \sum_{p=1}^{P}\sum_{i=1}^{N_p} \ln L_{(ip)} = -\frac{G\sum_{p=1}^{P} pN_P}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{P}\sum_{i=1}^{N_p}\ln\left|{\Omega^\mu_{(ip)}}^{-1}\right| - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{P}\sum_{i=1}^{N_p}\left[y_{(ip)} - x_{(ip)}\beta - \alpha^H_{(ip)}\right]' {\Omega^\mu_{(ip)}}^{-1}\left[y_{(ip)} - x_{(ip)}\beta - \alpha^H_{(ip)}\right]$$

hvor $\Omega^\mu_{(ip)}$ er kovariansmatrisen gitt ved 2.18). 2.21) kan også skrives som

2.22) $\mathrm{L}=-\frac{Gn}{2}\ln(2\pi)-\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{P}\sum_{i=1}^{N_p}\ln\left|\Omega^{\mu}_{(ip)}\right|-\frac{1}{2}Q\left(\beta,\alpha,\Omega^{\mu}_{(ip)}\right)$

hvor

2.23) $n=\sum_{p=1}^{P}pN_P$ og

$$Q\left(\beta,\alpha,\Omega^{\mu}_{(ip)}\right)=$$

$$\sum_{p=1}^{P}\sum_{i=1}^{N_p}\left[y_{(ip)}-x_{(ip)}\beta-\alpha^{H}_{(ip)}\right]'\Omega^{\mu}_{(ip)}{}^{-1}\left[y_{(ip)}-x_{(ip)}\beta-\alpha^{H}_{(ip)}\right]$$

L maksimeres med hensyn på de ukjente koeffisientmatrisene β og α samt den ukjente variansmatrisen $\Omega^{\mu}_{(ip)}$. Direkte maksimering av *L* er en komplisert oppgave og vi kan ikke skrive estimatorene på sluttet form. Vi kan imidlertid forenkle løsningsbetingelsene noe. Vi kan utlede førsteordensbetingelsene samt løsningsbetingelsene som utgjør de nødvendige betingelsene. De forenklede løsningsbetingelsene er prinsipielt ganske like for de ulike estimeringsproblemene i avsnitt 2.2.3, 2.2.4 og 2.2.5. Vi nøyer oss derfor med å studere dem i mer detalj i avsnitt 2.2.5 hvor vi har benyttet stokastiske koeffisienter.

2.2.2. Faste koeffisienter

I modell B antar vi at alle koeffisientene er faste men at δ_p, β_{EE}, β_{FF}, β_{LL} og β_{MM} varierer mellom bedriftene. Dette modellerer vi ved å legge inn dummy variable for hver av koeffisientene i hver bedrift.

Vi får nå et noe modifisert versjon av 2.15)

2.15') $y_{(ip)}=x_{(ip)}\beta+\ \alpha^{F}_{(ip)}+\mu_{(ip)}$,

Hvor vi har modifisert 2.16) for å gjøre den bedriftsspesifikk til

2.16') $\alpha^{F}_{(ip)}=e_p\otimes\tilde{\alpha}_{(ip)}$,

hvor $\alpha^{F}_{(ip)}$ er en ($Gp\times G$) matrise og $\tilde{\alpha}_{(ip)}=I_{G(ip)}\times\alpha$, hvor $I_{G(ip)}$ er identitetsmatrisen for bedrift (*ip*) med *G* elementer på hoveddiagonalen.

Forskjellen på 2.16) og 2.16') ser vi klarest dersom vi slår sammen alle N_p $\alpha_{(ip)}$'ene i samme matrise. 2.16) kan da skrives som

2.16b) $\alpha^{H}_{N_p}=e_{N_p}\otimes\alpha^{H}_{(ip)}$,

hvor e_{N_p} er en ($pN_p\times1$) enhetsvektor, $\alpha^{H}_{N_p}$ er en ($GpN_p\times1$) vektor hvor alle pN_p elementene består av α. 2.16') kan vi skrive som

2.16'b) $\alpha^{F}_{N_p}=I_{N_p}\otimes\alpha^{F}_{(ip)}$,

hvor I_{N_p} er en ($pN_p\times pN_p$) identitetsmatrise, $\alpha^{F}_{N_p}$ er en ($GpN_p\times GN_p$) matrise.

Tetthetsfunksjonen (som er felles for alle bedriftene) for restleddet $\mu_{(ip)}$, betinget med hensyn på $x_{(ip)}$ for bedrift (*ip*) er her som i tilfelle med homogene bedrifter gitt ved

2.24) $\mathrm{f}_{(ip)}=(2\pi)^{-\frac{Gp}{2}}\left|\Omega^{\mu}_{(ip)}\right|^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\mu'_{(ip)}\Omega^{\mu}_{(ip)}{}^{-1}\mu_{(ip)}\right]$

Ved å ta logaritmen til 2.24) å sette 2.15') inn i 2.24) får vi at log-likelihood funksjonen for bedrift (*ip*) er gitt ved

2.25)
$$\ln(\mathrm{L(ip)})=-\frac{Gp}{2}\ln(2\pi)-\frac{1}{2}\ln\left|\Omega^{\mu}_{(ip)}\right|$$
$$-\frac{1}{2}\left[y_{(ip)}-x_{(ip)}\beta-\alpha^{F}_{(ip)}\right]'\Omega^{\mu}_{(ip)}{}^{-1}\left[y_{(ip)}-x_{(ip)}\beta-\alpha^{F}_{(ip)}\right]$$

Fordi observasjonene fra bedriftene er uavhengige, fremkommer den betingede log-likelihood funksjonen for alle bedrifter ved å summere 2.25)

2.26)
$$\mathrm{L}=\sum_{p=1}^{P}\sum_{i=1}^{N_p}\ln\mathrm{L}_{(ip)}=$$
$$-\frac{G\sum_{p=1}^{P}pN_P}{2}\ln(2\pi)-\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{P}\sum_{i=1}^{N_p}\ln\left|\Omega^{\mu}_{(ip)}\right|$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{P}\sum_{i=1}^{N_p}\left[y_{(ip)}-x_{(ip)}\beta-\alpha^{F}_{(ip)}\right]'\Omega^{\mu}_{(ip)}{}^{-1}\left[y_{(ip)}-x_{(ip)}\beta-\alpha^{F}_{(ip)}\right]$$

hvor $\Omega^{\mu}_{(ip)}$ er en kovarians matrisen som er gitt ved 2.17).

2.26) kan også skrives som

2.27)
$$L=-\frac{Gn}{2}\ln(2\pi)-\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{P}\sum_{i=1}^{N_p}\ln\left|\Omega^{\mu}_{(ip)}\right|-\frac{1}{2}Q\left(\beta,\alpha^{F}_{(ip)},\Omega^{\mu}_{(ip)}\right)$$

hvor

2.28) $n=\sum_{p=1}^{P}pN_P$ og

$$Q\left(\beta,\alpha^{F}_{(ip)},\Omega^{\mu}_{(ip)}\right)$$
$$=\sum_{p=1}^{P}\sum_{i=1}^{N_p}\left[y_{(ip)}-x_{(ip)}\beta-\alpha^{F}_{(ip)}\right]'\Omega^{\mu}_{(ip)}{}^{-1}\left[y_{(ip)}-x_{(ip)}\beta-\alpha^{F}_{(ip)}\right]$$

L maksimeres med hensyn på de ukjente koeffisientmatrisen β og $\alpha^{F}_{(ip)}$ samt den ukjente variansmatrisen

$\Omega^{\mu}_{(ip)}$. Direkte maksimering av L er en komplisert oppgave og vi kan ikke skrive estimatorene på sluttet form. Vi kan imidlertid forenkle løsningsbetingelsene noe. Vi kan utlede førsteordensbetingelsene samt løsningsbetingelsene som utgjør de nødvendige betingelsene. De forenklede løsningsbetingelsene er prinsipielt ganske like for de ulike estimeringsroblemene i avsnitt 2.2.3, 2.2.4 og 2.2.5. Vi nøyer oss derfor med å studere dem i mer detalj i neste avsnitt.

2.2.3. Stokastiske koeffisienter

I modell C antar vi at variablene δ_p, β_{EE}, β_{FF}, β_{LL} og β_{MM} varierer stokastisk mellom bedriftene i henhold til en normalfordeling, mens resten av variablene er faste.

Den heterogene stokastikken i modellen blir ivaretatt av leddet $\alpha^{S}_{(ip)}$:

2.29) $\alpha^{S}_{(ip)} = \kappa + \varepsilon_{(ip)}$,

hvor $\alpha^{S}_{(ip)}$ er en ($G\times1$) vektor som skal fange opp de bedriftsspesifikke effektene, κ er en ($G\times1$) vektor med forventningsverdier som er felles for alle bedriftene (tilsvarer α i modell A). $\varepsilon_{(ip)}$ er en bedriftsspesifikk ($G\times1$) vektor hvor strukturen er beskrevet i 2.30) og 2.31) under. I vårt tilfelle kan 2.29) skrives som

2.30) $$\alpha^{S}_{(ip)} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_{(ip)\delta_p} \\ \alpha_{(ip)\beta_{EE}} \\ \alpha_{(ip)\beta_{FF}} \\ \alpha_{(ip)\beta_{LL}} \\ \alpha_{(ip)\beta_{MM}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_{\delta_p} \\ \kappa_{\beta_{EE}} \\ \kappa_{\beta_{FF}} \\ \kappa_{\beta_{LL}} \\ \kappa_{\beta_{MM}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{(ip)\delta_p} \\ \varepsilon_{(ip)\beta_{EE}} \\ \varepsilon_{(ip)\beta_{FF}} \\ \varepsilon_{(ip)\beta_{LL}} \\ \varepsilon_{(ip)\beta_{MM}} \end{bmatrix}$$

Vi har nå

2.9") $y_{(ip)t}=x_{(ip)t}\beta_{(ip)} + \alpha^{S}_{(ip)} + \mu_{(ip)t}$,
hvor $\eta_{(ip)t} = \varepsilon_{(ip)} + \mu_{(ip)t}$

Vi antar at

2.31) $\varepsilon_{(ip)} \sim IID(0_{K,1}, \Omega^{\alpha})$,

Restleddet $\mu_{(ip)}$ har de samme egenskapene som over.

I vårt (hvor G=5) tilfelle ser Ω^{α} ut som følger

2.32) $$\Omega^{\alpha}=\begin{bmatrix} \sigma^{\alpha}_{YY} & \sigma^{\alpha}_{YE} & \sigma^{\alpha}_{YF} & \sigma^{\alpha}_{YL} & \sigma^{\alpha}_{YM} \\ \sigma^{\alpha}_{EY} & \sigma^{\alpha}_{EE} & \sigma^{\alpha}_{EF} & \sigma^{\alpha}_{EL} & \sigma^{\alpha}_{EM} \\ \sigma^{\alpha}_{FY} & \sigma^{\alpha}_{FE} & \sigma^{\alpha}_{FF} & \sigma^{\alpha}_{FL} & \sigma^{\alpha}_{FM} \\ \sigma^{\alpha}_{LY} & \sigma^{\alpha}_{LE} & \sigma^{\alpha}_{LF} & \sigma^{\alpha}_{LL} & \sigma^{\alpha}_{LM} \\ \sigma^{\alpha}_{MY} & \sigma^{\alpha}_{ME} & \sigma^{\alpha}_{MF} & \sigma^{\alpha}_{ML} & \sigma^{\alpha}_{MM} \end{bmatrix}$$

Det at elementene som ikke ligger på hoveddiagonalen ikke er lik null, åpner for muligheten for at de bedriftsspesifikke effektene for samme bedrift i forskjellige ligninger kan være korrelert. Men innenfor hver ligning er feilkomponentene homoskedastisk.

Ved å sette 2.29) inn i 2.9") får vi

2.33) $y_{(ip)t}=x_{(ip)t}\beta_{(ip)} + \kappa + \eta_{(ip)t}$,
hvor $\eta_{(ip)t} = \varepsilon_{(ip)} + \mu_{(ip)t}$

I *tillegg* til forutsetning 2.10) antar vi nå

2.34) $x_{(ip)t}$, $\varepsilon_{(ip)}$ *og* $\mu_{(ip)t}$, $\varepsilon_{(ip)}$
er stokastisk uavhengige

Siden det kan være hensiktsmessig å ordne ligningene på en mer kompakt form kan vi skrive 2.33) på samme form som 2.15) i kapittel 2.2. Hvor vi nå kan skrive motstykke til 2.15) med stokastiske heterogenitets koeffisienter som

2.15") $y_{(ip)}=x_{(ip)}\beta_{(ip)} + \kappa_{(ip)} + \eta_{(ip)}$,

hvor $y_{(ip)}$, $x_{(ip)}$ og $\beta_{(ip)}$ er de samme vektorene/matrisen som i 2.15), $\kappa_{(ip)}$ er fortsatt lik for alle bedrifter hvor

2.35) $\kappa_{(ip)}=e_p\otimes\kappa$

e_p er som tidligere en ($p\times1$) enhetsvektor.

2.36) $\eta_{(ip)} \sim IID(0_{Gp,1}, \Omega_{(ip)})$

og
2.37) $Var(\eta_{(ip)})=E(\eta_{(ip)}\eta_{(ip)}')= \Omega_{(ip)}= (e_p e_p')\otimes\Omega^{\alpha} + I_p\otimes\Omega^{\mu}$

Hvor $(e_p e_p')$ er en ($p\times p$) matrise hvor alle elementer består av 1 tall, siden Ω^{α} er en ($G\times G$) matrise, er $(e_p e_p')\otimes\Omega^{\alpha}$ en $Gp\times Gp$ matrise.

2.38) $$(e_p e_p')\otimes\Omega^{\alpha} = \begin{bmatrix} \Omega^{\alpha} & \Omega^{\alpha} & \cdots & \Omega^{\alpha} \\ \Omega^{\alpha} & \Omega^{\alpha} & \cdots & \Omega^{\alpha} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Omega^{\alpha} & \Omega^{\alpha} & \cdots & \Omega^{\alpha} \end{bmatrix}.$$

I_p er identitetsmatrisen med p elementer på hoveddiagonalen. $I_p\otimes\Omega^{\mu}$ er Kronecker produktet mellom I_p som er en ($p\times p$) matrise og Ω^{μ} som er en ($G\times G$) matrise. Dvs.

2.39) $$I_p\otimes\Omega^{\mu} = \begin{bmatrix} \Omega^{\mu} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Omega^{\mu} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Omega^{\mu} \end{bmatrix},$$

som er en $Gp \times Gp$ matrise.

2.37), 2.38) og 2.39) gir oss

2.40) $$\Omega_{(ip)} = \begin{bmatrix} \Omega^{\alpha} + \Omega^{\mu} & \Omega^{\alpha} & \cdots & \Omega^{\alpha} \\ \Omega^{\alpha} & \Omega^{\alpha} + \Omega^{\mu} & \cdots & \Omega^{\alpha} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Omega^{\alpha} & \Omega^{\alpha} & \cdots & \Omega^{\alpha} + \Omega^{\mu} \end{bmatrix},$$

som er en $Gp \times Gp$ matrise

Vi setter $(e_p e_p') = pA_p$ og $I_p = A_p + B_p$, hvor

2.41) $$A_p = \frac{e_p e_p'}{p},$$

hvor A_p er en $p \times p$ matrise hvor alle elementener er lik $\frac{1}{p}$, og

2.42) $$B_p = I_p - \frac{e_p e_p'}{p} = I_p - A_p,$$

hvor B_p er en $p \times p$ matrise hvor elementene på hoveddiagonalen er lik $1 - \frac{1}{p}$ og de øvrige elementene er lik $-\frac{1}{p}$.

Vi får nå vi at vi kan skrive 2.37) som

2.43) $$\Omega_{(ip)} = A_p \otimes \left(\Omega^{\mu} + p\Omega^{\alpha}\right) + B_p \otimes \Omega^{\mu}$$

Den inverse til $\Omega_{(ip)}$ gitt i 2.43) kan vi da skrive som

2.44) $$\Omega_{(ip)}^{-1} = A_p \otimes \left(\Omega^{\mu} + p\Omega^{\alpha}\right)^{-1} + B_p \otimes \Omega^{\mu^{-1}}$$

For å estimere ligning 2.15") har vi valgt å benytte oss av sannsynlighetsmaksimering. Tetthetsfunksjonen (som er felles for alle bedriftene) for det sammensatte restleddet $\eta_{(ip)}$, betinget med hensyn på $x_{(ip)}$ for bedrift (ip) er gitt ved

2.45) $$f_{(ip)} = (2\pi)^{-\frac{Gp}{2}} \left|\Omega_{(ip)}\right|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\eta_{(ip)}' \Omega_{(ip)}^{-1} \eta_{(ip)}\right]$$

Ved å ta logaritmen til 2.45) å sette inn 2.15") inn i 2.45) får vi at log-likelihood funksjonen for bedrift (ip) er gitt ved

2.46) $$\ln(L_{(ip)}) = -\frac{Gp}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln\left|\Omega_{(ip)}\right| - \frac{1}{2}\left[y_{(ip)} - x_{(ip)}\beta - \kappa_{(ip)}\right]' \Omega_{(ip)}^{-1}\left[y_{(ip)} - x_{(ip)}\beta - \kappa_{(ip)}\right]$$

2.46) kan også skrives som

2.47) $$\mathrm{L}_{(ip)} = \ln \mathrm{L}_{(ip)} = -\frac{Gp}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln\left|\Omega_{(ip)}\right| - \frac{1}{2} Q_{(ip)}\left(\beta, \kappa, \Omega^{\mu}, \Omega^{\beta}\right)$$

hvor

2.48) $$Q_{(ip)}\left(\beta, \kappa, \Omega^{\mu}, \Omega^{\beta}\right) = \left[y_{(ip)} - x_{(ip)}\beta - \kappa_{(ip)}\right]' \Omega_{(ip)}^{-1}\left[y_{(ip)} - x_{(ip)}\beta - \kappa_{(ip)}\right]$$

Fordi observasjonene fra bedriftene er uavhengige, fremkommer den betingede log-likelihood funksjonen for alle bedrifter ved å summere 2.46)

2.49) $$\mathrm{L} = \sum_{p=1}^{P}\sum_{i=1}^{N_p} \ln \mathrm{L}_{(ip)} = -\frac{G\sum_{p=1}^{P} pN_P}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{P}\sum_{i=1}^{N_p}\ln\left|\Omega_{(ip)}\right| - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{P}\sum_{i=1}^{N_p}\left[y_{(ip)} - x_{(ip)}\beta - \kappa_{(ip)}\right]' \Omega_{(ip)}^{-1}\left[y_{(ip)} - x_{(ip)}\beta - \kappa_{(ip)}\right]$$

hvor $\Omega_{(ip)}$ er gitt ved 2.40). 2.49) kan også skrives som

2.50) $$L = \sum_{p=1}^{P}\sum_{i=1}^{N_p} \ln \mathrm{L}_{(ip)} = -\frac{Gn}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{P}\sum_{i=1}^{N_p}\ln\left|\Omega_{(ip)}\right| - \frac{1}{2} Q\left(\beta, \kappa, \Omega^{\mu}, \Omega^{\beta}\right)$$

hvor

2.51) $n = \sum_{p=1}^{P} pN_P$ og

$$Q\left(\beta, \kappa, \Omega^{\mu}, \Omega^{\beta}\right) = \sum_{p=1}^{P}\sum_{i=1}^{N_p}\left[y_{(ip)} - x_{(ip)}\beta - \kappa_{(ip)}\right]' \Omega_{(ip)}^{-1}\left[y_{(ip)} - x_{(ip)}\beta - \kappa_{(ip)}\right]$$

L maksimeres med hensyn på de ukjente varianskomponentelementene i $\Omega_{(ip)}$, samt koeffisientmatrisen β og vektoren κ. Direkte maksimering av L er en komplisert oppgave og vi kan ikke skrive estimatorene på sluttet form. Vi kan imidlertid forenkle løsningsbetingelsene noe. Vi kan utlede førsteordensbetingelsene samt løsningsbetingelsene som utgjør de nødvendige betingelsene. Vi kan dele maksimeringsproblemet av 2.50) opp i to delproblemer:

1. Maksimer 2.50) med hensyn på β og κ gitt Ω^{μ} og Ω^{α}.
2. Maksimer 2.50) med hensyn på Ω^{μ} og Ω^{α} gitt β og κ.

Av 2.50) og 2.51) ser vi at løsningen på delproblem 1 er det samme som løsningen av det mer tradisjonelle generalisert minste kvadraters metode (GLS). Løsningen av GLS problemet gir følgende betingede løsninger for β.

Med små justeringer kan vi i henhold til Biørn (2000b) skrive GLS estimatorene for delproblem 1 som

$$2.52)\quad \hat{\beta}_{GLS} = \hat{\beta}\left(\Omega^{\mu},\Omega^{\alpha}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{p=1}^{P}\sum_{i=1}^{N_p} \tilde{X}'_{(ip)}\left[A_p \otimes \left(\Omega^{\mu}+p\Omega^{\alpha}\right)^{-1}\right]\tilde{X}_{(ip)} \\ +\sum_{p=1}^{p}\sum_{i=1}^{N_p} \tilde{X}'_{(ip)}\left(B_p \otimes \Omega^{\mu^{-1}}\right)\tilde{X}_{(ip)} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\times \begin{bmatrix} \sum_{p=1}^{p}\sum_{i=1}^{N_p} \tilde{X}'_{(ip)}\left[A_p \otimes \left(\Omega^{\mu}+p\Omega^{\alpha}\right)^{-1}\right]\tilde{y}_{(ip)} \\ +\sum_{p=1}^{p}\sum_{i=1}^{N_p} \tilde{X}'_{(ip)}\left(B_p \otimes \Omega^{\alpha^{-1}}\right)\tilde{y}_{(ip)} \end{bmatrix}$$

hvor A_p og B_p er definert i henholdsvis 2.41) og 2.42) og hvor

$$2.53)\quad \tilde{X}_{(ip)} = \begin{bmatrix} x_{(ip)1} \\ \vdots \\ x_{(ip)p} \end{bmatrix} \text{ hvor } x_{(ip)t} = \begin{bmatrix} x_{(ip)1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & x_{(ip)G} \end{bmatrix}, \text{ og}$$

$$\tilde{y}_{(ip)} = \begin{bmatrix} y_{(ip)1} \\ \vdots \\ y_{(ip)p} \end{bmatrix} \text{hvor } y_{(ip)t} = \begin{bmatrix} y_{(ip)1} \\ \vdots \\ y_{(ip)G} \end{bmatrix},$$

$t=1,\ldots,p$ og $g=1,\ldots,G$

De bedriftsspesifikke gjennomsnitt for ligning g kan skrives som

$$2.54)\quad \bar{y}_{(ip)g} = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} y_{(ip)gj} \text{ og } \bar{x}_{(ip)g} = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} x_{(ip)gj} \quad g=1,\ldots,G$$

På vektor form er de bedriftsspesifikke gjennomsnitt $\bar{y}_{(ip)}$ og $\bar{x}_{(ip)}$ gitt ved

$$2.55)\quad \bar{y}_{(ip)} = \begin{bmatrix} \bar{y}_{(ip)1} \\ \vdots \\ \bar{y}_{(ip)G} \end{bmatrix} \text{ og } \bar{x}_{(ip)} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{(ip)1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{x}_{(ip)G} \end{bmatrix}$$

De globale veide gjennomsnitt kan skrives som

$$2.56)\quad \bar{y} = \left[\sum_{p=1}^{P}\sum_{i=1}^{p} p\theta_{B_{(ip)}}\right]^{-1} \times \left[\sum_{p=1}^{P}\sum_{i=1}^{p}\left(p\theta_{B_{(ip)}}\right)\bar{y}_{(ip)}\right] \text{ og}$$

$$2.57)\quad \bar{x} = \left[\sum_{p=1}^{P}\sum_{i=1}^{p} p\theta_{B_{(ip)}}\right]^{-1} \times \left[\sum_{p=1}^{P}\sum_{i=1}^{p}\left(p\theta_{B_{(ip)}}\right)\bar{x}_{(ip)}\right]$$

$\theta_{B_{(ip)}}$ er en bedriftsspesifikk vekt gitt ved

$$2.58)\quad \theta_{B_{(ip)}} = \left(\Omega^{\mu}+p\Omega^{\alpha}\right)^{-1}\Omega^{\mu}$$

GLS estimatoren for konstantleddene kan da skrives som

$$2.59)\quad \hat{\kappa}_{GLS} = \hat{\kappa}\left(\Omega^{\mu},\Omega^{\alpha}\right) = \bar{y} - \bar{x}\hat{\beta}_{GLS}$$

Første likhet i ligning 2.52) og 2.59) indikerer at estimatorene til henholdsvis β og κ begge er funksjoner av Ω^{α} og Ω^{μ}.

Selv om datasettet totalt sett er ubalansert, så utgjør hvert deldatasett p[7] et balansert paneldatasett, det er dette samt måten vi har valgt å organisere dataene på som gjør at vi kan benytte oss av Kronecker produktene i beregningene ovenfor.

Løsning på delproblem 2:
Før vi går videre må vi først introdusere begrepet *vec*-operator. *vec*-operatoren til restledet i 2.33) kan vi skrive som

$$2.60)\,(vec(H_{(ip)}))' = \begin{bmatrix} \eta_{1(ip)1} & \eta_{2(ip)1} & \cdots & \eta_{G(ip)1} & \cdots & \cdots & \eta_{G(ip)p} \end{bmatrix}$$

som er en $(Gp\times 1)$ vektor, og hvor $H_{(ip)}$ er restleddsmatrisen gitt ved

[7] Hvert deldatasett p er sammensatt av alle (ip) bedrifter som eksisterer i p år.

2.61) $$\mathrm{H}_{(ip)}=\begin{bmatrix}\eta_{1(ip)1} & \cdots & \eta_{1(ip)1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \eta_{G(ip)1} & \cdots & \eta_{G(ip)p}\end{bmatrix}$$

I henhold til Biørn (2000b) har vi at vi kan skrive 2.48) som

2.62) $$Q_{(ip)}\left(\beta,\kappa,\Omega^{\mu},\Omega^{\beta}\right)=\tilde{\eta}'_{(ip)}\Omega^{-1}_{(ip)}\tilde{\eta}_{(ip)}$$
$$=\tilde{\eta}'_{(ip)}\left(A_p\otimes\left(\Omega^{\mu}+p\Omega^{\alpha}\right)^{-1}\right)\tilde{\eta}_{(ip)}+\tilde{\eta}'_{(ip)}\left(B_p\otimes\Omega^{\mu-1}\right)\tilde{\eta}_{(ip)}$$
$$=\begin{aligned}&vec\left(\mathrm{H}_{(ip)}\right)'\left(A_p\otimes\left(\Omega^{\mu}+p\Omega^{\alpha}\right)^{-1}\right)vec\left(\mathrm{H}_{(ip)}\right)\\&+vec\left(\mathrm{H}_{(ip)}\right)'\left(B_p\otimes\Omega^{\mu-1}\right)vec\left(\mathrm{H}_{(ip)}\right)\end{aligned}$$

Hvor vi i andre likhet har benyttet 2.44), og hvor restledet $\tilde{\eta}_{(ip)}$ er definert på samme måte som i 2.53). I tredje likhet har vi benyttet vec-operatoren gitt ved 2.60). Trasen til 2.62) kan vi skrive som,

2.63) $$Q_{(ip)}=tr(Q_{(ip)})=tr\left[\mathrm{H}_{(ip)}'\left(\Omega^{\mu}+p\Omega^{\alpha}\right)^{-1}\mathrm{H}_{(ip)}A_p\right]$$
$$+\,tr\left[\mathrm{H}_{(ip)}'\Omega^{\mu-1}\mathrm{H}_{(ip)}B_p\right]$$
$$=tr\left[\mathrm{H}_{(ip)}A_p\mathrm{H}_{(ip)}'\left(\Omega^{\mu}+p\Omega^{\alpha}\right)^{-1}\right]+tr\left[\mathrm{H}_{(ip)}B_p\mathrm{H}_{(ip)}'\Omega^{\mu-1}\right]$$

Hvor vi i første ledd på høyre side av andre likhetstegn benytter oss av regelen

$tr(ABCD)=vec(A')'(D'\otimes B)vec(C)$

hvor $A'=H_{(ip)}$, $B=\left(\Omega^{\mu}+p\Omega^{\alpha}\right)^{-1}$, $C=H_{(ip)}$ og $D=A_p$ og vi har at $A_p'=A_p$
I andre ledd på høyre side av andre likhetstegn benytter oss av samme regel, men hvor,

$A'=H_{(ip)}$, $B=\Omega^{\mu-1}$, $C=H_{(ip)}$ og $D=B_p$ og vi har at $B_p'=B_p$

I tredje likhetstegn benytter vi $tr(ABCD)=tr(CDAB)$. Den deriverte av 2.63) med hensyn på henholdsvis Ω^{μ} og Ω^{α} kan skrives som

2.64) $$\frac{\partial Q_{(ip)}}{\partial\Omega^{\mu}}=$$
$$-\left(\Omega^{\mu}+p\Omega^{\alpha}\right)^{-1}\mathrm{H}_{(ip)}A_p\mathrm{H}_{(ip)}'\left(\Omega^{\mu}+p\Omega^{\alpha}\right)^{-1}+\Omega^{\mu-1}\mathrm{H}_{(ip)}B_p\mathrm{H}_{(ip)}'\Omega^{\mu-1}$$

2.65) $$\frac{\partial Q_{(ip)}}{\partial\Omega^{\alpha}}=-p\left(\Omega^{\mu}+p\Omega^{\alpha}\right)^{-1}\mathrm{H}_{(ip)}A_p\mathrm{H}_{(ip)}'\left(\Omega^{\mu}+p\Omega^{\alpha}\right)^{-1}$$

Hvor vi benytter regelen om at

$$\frac{\partial tr(CB^{-1})}{\partial B}=-\left(B^{-1}CB^{-1}\right)$$

Hvor $B=\left(\Omega^{\mu}+p\Omega^{\alpha}\right)$ og $C=\mathrm{H}_{(ip)}A_p\mathrm{H}_{(ip)}'$ i første ledd i 2.63), og hvor vi setter $B=\Omega^{\mu}$ og $C=\mathrm{H}_{(ip)}B_p\mathrm{H}_{(ip)}'$ i andre ledd i 2.63)

Vi har at 2.43) kan skrives som

2.66)
$$\left|\Omega_{(ip)}\right|=\left|A_p\otimes\left(\Omega^{\mu}+p\Omega^{\alpha}\right)+B_p\otimes\Omega^{\mu}\right|=\left|\Omega^{\mu}+p\Omega^{\alpha}\right|\left|\Omega^{\mu}\right|^{p-1}$$

Hvor vi i andre likhet har benyttet oss av regelen[8]

$$\left|A_p\otimes C+B_p\otimes D\right|=\left|C\right|\left|D\right|^{p-1}$$

Den deriverte av logaritmen til 2.66) med hensyn på henholdsvis Ω^{μ} og Ω^{α} kan skrives som

2.67) $$\frac{\partial\ln\left|\Omega_{(ip)}\right|}{\partial\Omega^{\mu}}=\frac{\partial\ln\left|\Omega^{\mu}+p\Omega^{\alpha}\right|}{\partial\Omega^{\mu}}+(p-1)\frac{\partial\ln\left|\Omega^{\mu}\right|}{\partial\Omega^{\mu}}$$
$$=\left(\Omega^{\mu}+p\Omega^{\alpha}\right)^{-1}+(p-1)\Omega^{\mu-1}$$

2.68) $$\frac{\partial\ln\left|\Omega_{(ip)}\right|}{\partial\Omega^{\alpha}}=\frac{\partial\ln\left|\Omega^{\mu}+p\Omega^{\alpha}\right|}{\partial\Omega^{\alpha}}=p\left(\Omega^{\mu}+p\Omega^{\alpha}\right)^{-1}$$

Ved å benytte 2.64)-2.65) og 2.67)-2.68) gir førsteordens betingelsene av 2.46) med hensyn på henholdsvis Ω^{μ} og Ω^{α} oss

2.69) $$\frac{\partial L_{(ip)}}{\partial\Omega^{\mu}}$$
$$=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\left(\Omega^{\mu}+p\Omega^{\alpha}\right)^{-1}+(p-1)\Omega^{\mu-1}\\-\left(\Omega^{\mu}+p\Omega^{\alpha}\right)^{-1}\mathrm{H}_{(ip)}A_p\mathrm{H}_{(ip)}'\left(\Omega^{\mu}+p\Omega^{\alpha}\right)^{-1}\\+\Omega^{\mu-1}\mathrm{H}_{(ip)}B_p\mathrm{H}_{(ip)}'\Omega^{\mu-1}\end{bmatrix}$$

2.70) $$\frac{\partial L_{(ip)}}{\partial\Omega^{\alpha}}$$
$$=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}p\left(\Omega^{\mu}+p\Omega^{\alpha}\right)^{-1}\\-p\left(\Omega^{\mu}+p\Omega^{\alpha}\right)^{-1}\mathrm{H}_{(ip)}A_p\mathrm{H}_{(ip)}'\left(\Omega^{\mu}+p\Omega^{\alpha}\right)^{-1}\end{bmatrix}$$

[8] Se Biørn (2000b).

Som etter innsetning i førsteordens betingelsene for maksimering av 2.48) $\frac{\partial L}{\partial \Omega^{\mu}} = \frac{\partial L}{\partial \Omega^{\alpha}} = 0_{G,G}$, hvor vi summere opp betingelsene i 2.69) og 2.70) for alle bedriftene, gir oss et ligningssystem med løsning

$$2.71)\ \hat{\Omega}^{\mu} + p\hat{\Omega}^{\alpha} = \hat{\Omega}^{\mu}(\beta,\kappa) + p\hat{\Omega}^{\alpha}(\beta,\kappa)$$
$$= \frac{1}{N_p p} \sum_{p=1}^{P} \sum_{i=1}^{p} \mathrm{H}_{(ip)} A_p \mathrm{H}_{(ip)}'$$

$$2.72)\ \hat{\Omega}^{\mu} = \hat{\Omega}^{\mu}(\beta,\kappa) = \frac{1}{N_p p(p-1)} \sum_{p=1}^{P} \sum_{i=1}^{p} \mathrm{H}_{(ip)} B_p \mathrm{H}_{(ip)}'$$

Ved å sette 2.72) inn i 2.71) får vi

$$2.73)\ \hat{\Omega}^{\alpha} = \hat{\Omega}^{\alpha}(\beta,\kappa)$$
$$= \frac{1}{pN_p p}\left[\sum_{p=1}^{P} \sum_{i=1}^{p} \mathrm{H}_{(ip)} A_p \mathrm{H}_{(ip)}' - \frac{1}{(p-1)} \sum_{p=1}^{P} \sum_{i=1}^{p} \mathrm{H}_{(ip)} B_p \mathrm{H}_{(ip)}'\right]$$

2.72) og 2.73) kan også skrives som

$$2.74)\ \hat{\Omega}^{\mu} + \hat{\Omega}^{\alpha} = \hat{\Omega}^{\mu}(\beta,\kappa) + \hat{\Omega}^{\alpha}(\beta,\kappa)$$
$$= \frac{1}{pN_p p}\left[\sum_{p=1}^{P} \sum_{i=1}^{p} \mathrm{H}_{(ip)} A_p \mathrm{H}_{(ip)}' - \sum_{p=1}^{P} \sum_{i=1}^{p} \mathrm{H}_{(ip)} B_p \mathrm{H}_{(ip)}'\right]$$

I 2.72)-2.73) har vi nå beskrevet løsningen til delproblem 1 og 2. Maksimeringen kan gjennomføres ved en iterasjonsmetode hvor vi vekselsvis løser delproblem 1 og 2. For å løse dette iterasjonsproblemet har vi benyttet programpakken SAS, programmet er beskrevet i vedlegg A.

Det må være et vist antall bedrifter for at det skal bli parameterbesparende å benytte stokastiske koeffisienter. I vårt tilfelle hvor vi har fem heterogenitets koeffisienter. Innebærer dette at vi i tilfellet med stokastiske variable må estimere 15 ukjente varianskomponenter i Ω^{α} og dette må sammenlignes med antall dummy-variable vi må estimere i tilfelle med faste variable. I tilfelle med faste koeffisienter må vi estimere (5×antall bedrifter) koeffisienter. Vi ser at så lenge vi har flere enn tre bedrifter vil det være parameter besparende å benytte stokastiske koeffisienter framfor faste koeffisienter.

3. Data og stiliserte fakta

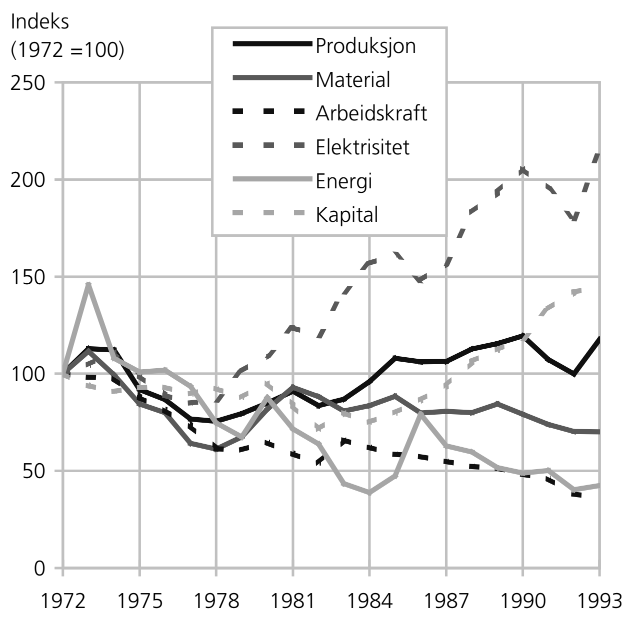
Dataene vi bruker er et ubalansert paneldatasett over norske treforedlingsbedrifter innenfor næringene med ISIC-kode 34111 Produksjon av mekanisk tremasse, 34112 Produksjon av sulfatcellulose og 34113 Produksjon av sulfittcellulose. Hver bedrift er observert i minimum fire år og maksimum 22 år. Antall bedrifter er 45, med totalt 676 observasjoner, så i gjennomsnitt er bedriftene observerte i 15 år. Av disse bedrifter er 16 observerte i hele observasjonsperioden. Disse representerer drøyt halvparten av antall observasjoner. Datasettet kommer primært fra Industristatistikken i Statistisk Sentralbyrå, men er komplementert med data fra Nasjonalregnskapet.

I profittfunksjonen benytter vi fire variable innsatsfaktorer: Arbeidskraft, Elektrisitet, annet brensel og annet materiale, samt et homogent sluttprodukt. Arbeidskraften måles i antall timer og elektrisitet i GWh. For annet brensel, som for det meste består av fossile brensler[9], er energiinnholdet omregnet til GWh.

De respektive innsatsfaktorers enhetspris fremkommer ved å dividere de totale kostnadene med faktorbruken for den respektive innsatsfaktor. Prisen på annet materiale kommer fra Nasjonalregnskapet og er likt for alle bedrifter. Det forbrukte volum har vi også beregnet fra denne prisindeksen. Innsatsvarene er målt i bruttoenheter, noe som medfører at også ikke-produktiv faktorinnsats er inkludert, for eksempel arbeidskraftskostnader for administrasjon og elektrisitet til lys og oppvarming av kontorer. I tillegg antas kapitalen å være en kvasifix innsatsvare. Kapitaldataene er kalkulert fra to kategorier, maskin og utrustning og anlegg og bygninger. Data på investeringer er deflatert ved bruk av en bransjespesifikk investeringsprisindeks. Kapitalen er beregnet ved bruk av såkalt "Perpetual Inventory Method". Depresieringsraten er 4 prosent for anlegg og bygninger, og 8 prosent for maskiner og utrustning. Som utgangspunkt for en "Benchmark" bruker vi et antatt bruttooverskudd[10] for hver enkelt bedrift på syv prosent over hele den tiden som bedriften observeres. Deretter kalkuleres kapitalmengden som bruttooverskuddet dividert med kapitalkostnaden. Dette nivået på kapitalen antas å gjelde for medianåret til hver bedrift.

I figur 4.1 ser vi utviklingen av produksjonen og faktorbruken for hele masseindustrien i perioden 1972-1993, skalert til 100 for 1972. Vi kan se at faktorbruken av arbeidskraft, annet brensel/energi og annet materiale har blitt mer effektivt per produsert enhet, mens bruken av elektrisitet har vokst sterkt. Kapitalmengden og produksjonen har hatt omtrent samme utvikling. Dette skyldes for en stor del teknologiskift, da vi har hatt en overgang fra flere mindre bedrifter som produserte mekanisk masse, til større og mer energi- og spesielt mer kapitalintensive bedrifter som produserer termomekanisk masse og sulfatmasse. Det fantes 42 bedrifter i 1972 som produserte i gjennomsnitt 43 400 tonn masse per bedrift. I 1993 var det 17 bedrifter i drift, disse produserte i gjennomsnitt 126 900 tonn masse per bedrift.

Figur 4.1. Produksjon og faktorbruk i Masseindustrien 1972-1993



[9] I noen bedrift er imidlertid ved en betydelig energikilde.

[10] Det vil si omsetning minus kostnadene for variable innsatsfaktorer,

4. Empiri

I estimeringen av modellen beskrevet i kapitel 2, har vi benyttet PROC MIXED-prosedyren i SAS/STAT programvare (SAS, 1999). Først skal vi se på hvilken modell som ser ut til å være den mest egnede gitt det datasettet vi har tilgjengelig. Deretter skal vi se på forskjellige elastisitetsmål med tolkninger av den økonomiske betydningen.

4.1. Hva er best; stokastiske eller faste effekter?

Hvordan skal vi kunne avgjøre hvilken metode som er best egnet gitt det datasettet vi har tilgjengelig. Metoden med faste dummy variable er kostnadskrevende i form av tapte frihetsgrader og i et stort paneldatasett vil en modell med stokastiske koeffisienter kunne gi bedre effisiens. Men det er ikke sikkert antagelsen om at de individuelle effektene er stokastisk uavhengig av de andre høyresidevariablene holder (forutsetning 2.34)). Dette kan medføre at de stokastiske effektene er inkonsistente (Hausman og Taylor 1981).

I tabell 4.1 rapporteres estimatene av elementene i parametervektoren β, se ligning (2.13). Det synes som om estimatene for de fleste parameterene er ganske like for alle modellene. Vi kan ikke utfra estimatene si at å ikke modellere heterogenitet gir inkonsistente estimater av koeffisientene. De fleste koeffisientene er også signifikante ifølge de asymptotiske standardfeilene.

I tabell 4.2 presenteres ulike tilpasningsmål på hele modellsystemet. Både Akaike's (Akaike, 1987) og Schwartz Bayesian's informasjonskriterier (Schwarts, 1978) støtter modellen med faste bedriftspesifikke effekter, og modellen med ingen heterogenitetes-effekter kommer dårligst ut. I modellen med faste koeffisienter estimeres totalt 245 parametre. I modellen med stokastiske effekter estimeres 40 parametre, mot 25 i modellen med homogene koeffisienter. Vi har også med log-likelihood verdiene. Log-likelihood ratio kan man beregne fra disse verdiene. Men ifølge Biørn m.fl. (1998) er ikke testverdiene asymptotisk χ^2 -fordelte, ettersom koeffisientene er på grensen av den tilstedelige parametermengden. Mer diskusjoner om statistiske tester for mikset lineære modeller se Khuri m.fl. (1998).

For å teste hvorvidt en modell med stokastiske heterogenitetskoeffisienter er "bedre" enn en modell med faste koeffisienter kan vi benytte en Hausmans-test (Hausman 1978), slik denne er beskrevet i Greene (1993). Testen baserer seg på hypotesen om at når forutsetning 2.34) holder så vil både metoden med faste- og stokastiske koeffisienter gi konsistente estimatorer, men metoden med faste koeffisienter vil være ineffisient. Dette medfører at under nullhypotesen vil ikke estimatorvektorene avvike vesentlig fra hverandre. En annen forutsetning for Hausmans test er at kovariansen mellom en effisient estimator og dens differanse fra en ineffisient estimator er lik null.

Tabell 4.1 Koeffisientestimatene og standardavvik

Koeff-isient	Modell A Homogene koeffisienter[1]		Modell B Faste effekter[2]		Modell C Stokastiske effekter[3]	
	Estimat	St. avvik	Estimat	St. avvik	Estimat	St. avvik
δ_P	-20.239	5.156	-29.914	9.615	4.866	9.170
δ_L	14.765	1.202	12.040	1.195	11.185	1.118
δ_E	-5.399	3.159	-3.567	2.865	-4.566	2.855
δ_F	-13.360	2.426	-4.162	1.950	-4.938	1.930
δ_M	14.765	1.202	12.040	1.195	11.185	1.118
β_{LL}	16.944	4.090	3.062	8.645	16.982	6.187
β_{LE}	-24.786	5.330	-20.584	4.753	-20.326	4.729
β_{LF}	-39.054	4.961	-16.499	3.308	-17.308	3.367
β_{LM}	-24.787	2.060	-12.279	1.787	-11.931	1.733
β_{EE}	26.187	17.720	95.183	20.251	42.956	19.459
β_{EF}	50.869	11.214	14.627	8.037	14.864	8.134
β_{EM}	14.251	4.074	3.545	3.198	4.808	3.235
β_{FF}	28.484	18.581	18.570	14.455	-27.052	19.89
β_{FM}	15.720	3.815	8.460	2.452	8.004	2.498
β_{MM}	141.090	20.873	190.040	26.355	62.141	29.495
β_{KL}	0.112	0.008	-0.034	0.0148	0.0032	0.012
β_{TL}	0.743	0.294	1.227	0.275	0.947	0.273
β_{KE}	-0.390	0.020	-0.106	0.028	-0.146	0.026
β_{TE}	-4.110	0.709	-5.748	0.518	-5.519	0.530
β_{KF}	-0.147	0.021	0.123	0.020	0.120	0.019
β_{TF}	1.090	0.779	0.336	0.377	0.353	0.385
β_{KM}	-0.428	0.020	0.073	0.022	0.051	0.022
β_{TM}	0.791	0.722	-1.268	0.434	-1.129	0.444
δ_K	0.266	0.009	0.052	0.013	0.073	0.012
δ_T	0.440	0.317	1.309	0.249	1.260	0.249

[1] Alle koeffisientene antas å være homogene

[2] Gjennomsnittet av δ_p, β_{LL}, $\beta_{EE,}$ $\beta_{FF,}$ β_{MM} , som antas å væra faste bedriftsspesifikke

[3] Forventningsverdi av $\delta_{p(i,p)}$, $\beta_{LL(i,p)}$, $\beta_{EE(i,p),}$ $\beta_{FF(i,p),}$ $\beta_{MM(i,p)}$ i den stokastiske modellen.

4.1)

$$\mathrm{Cov}\left[(\hat{b}-\hat{\beta}),\hat{\beta}\right]=\frac{1}{2}\left[Var\left((\hat{b}-\hat{\beta})+\hat{\beta}\right)-Var\left(\hat{b}-\hat{\beta}\right)-Var\left(\hat{\beta}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[Var\left(\hat{b}\right)-\left[Var\left(\hat{b}\right)+Var\left(\hat{\beta}\right)-2Cov\left(\hat{b},\hat{\beta}\right)\right]-Var\left(\hat{\beta}\right)\right]$$

$$=Cov\left(\hat{b},\hat{\beta}\right)-Var\left(\hat{\beta}\right)=0\Rightarrow\ Cov\left(\hat{b},\hat{\beta}\right)=Var\left(\hat{\beta}\right)$$

Vi har også at

4.2) $Var\left(\hat{b}-\hat{\beta}\right)=Var\left(\hat{b}\right)+Var\left(\hat{\beta}\right)-2Cov\left(\hat{b},\hat{\beta}\right)$

Innsetting av 4.1) i 4.2) gir oss

4.3) $Var\left(\hat{b}-\hat{\beta}\right)=Var\left(\hat{b}\right)-Var\left(\hat{\beta}\right)=\Sigma$

Hvor Σ nå er en matrise. χ^2 testen basert på Wald kriteriene (Wald, 1943) er:

4.4) $W=X^2[K]=\left[\hat{b}-\hat{\beta}\right]\hat{\Sigma}^{-1}\left[\hat{b}-\hat{\beta}\right]$

Under null hypotesen er *W* asymptotisk fordelt etter en χ^2 fordeling med *K* frihetsgrader.

Den alternative hypotesen er at *FK* (faste koeffisienter) er konsistent, mens *SK* (stokastiske koeffisienter) er inkonsistent, dette følger av at forutsetning 2.34) ikke holder noe som medfører at 4.1) ikke lenger holder da $\hat{\beta}$ ikke lenger er konsistent. Dersom Cov $\left[(\hat{b}-\hat{\beta}),\hat{\beta}\right]$ avviker "nok"[11] fra null må vi forkaste hypotesen om at den stokastiske metoden er mer effesient enn faste koeffisienters modellen. Årsaken til dette er at under den alternative hypotesen vil *FK* gi konsistente estimatorer, mens *SK* kan gi inkonsistente estimatorer dersom ikke forutsetning 2.34) holder. Dersom $\left(\hat{b}-\hat{\beta}\right)^2$ avviker "nok" fra null indikerer dette at $\hat{\beta}$ ikke er konsistent. Dette følger av Hausmans forutsetning 4.1), noe som igjen betyr at forutsetning 2.34) ikke holder. Dette gjelder selv om $Var(b)<Var(\beta)$. I tabell 4.2 ser vi at Hausmans test indikerer at modell B med faste bedriftspesifike effekter er å foretrekke framfor Modell C med stokastiske effekter. χ^2 med 19 frihetsgrader er 192.2 som er signifikant for alle signifikansnivåer. Man skal imidlertid ikke legge for mye vekt på Hausmans testen i tilfeller hvor man benytter sannsynlighetsmaksimering fordi det vi egentlig tester er om forutsetning 2.34) holder *gitt at forutsetning 2.10) holder.* Dersom vi har brudd på forutsetning 2.10) faller Hausmans test sammen i tilfelle med sannsynlighetsmaksimering. Dette skjer fordi vi da kan risikere å teste to inkonsistente parametervektorer mot hverandre.

Tabell 4.2. Tilpasningsmål på modellene

	Modell A	Modell B	Modell C
Antall estimerte parametre	25	245	40
-2*Log-Likelihood	36282.6	33511.6	34331.5
Akaike Informasjons kriteriet	36362.6	34031.6	34441.5
Schwartz Bayesian kriteriet	36543.3	35205.8	34540.9
Hausman-test			192.2

Tabell 4.3. Kovariansmatrisen for de stokastiske effektene i Modell B

	$\delta_{(ip)}$	$\beta_{L(ip)}$	$\beta_{E(ip)}$	$\beta_{F(ip)}$	$\beta_{M(ip)}$
$\delta_{(ip)}$	84.0956				
$\beta_{L(ip)}$	27.7668	38.2768			
$\beta_{E(ip)}$	-68.452	4.4496	378.66		
$\beta_{F(ip)}$	-79.0469	-28.019	26.0038	395.77	
$\beta_{M(ip)}$	-98.5906	-78.4154	111.88	301.9	869.96

Tabell 4.4. Kovariansmatrisen av det genuine restledet. Modell A

	u_X	u_L	u_E	u_F	u_M
u_X	1965.51				
u_L	-46.2292	11241			
u_E	223.06	-1557.93	13133		
u_F	-1269.62	3008.56	8792.08	10950	
u_M	634.84	-3685.64	-1849.17	-3719.25	2182.76

Modell B

	u_X	u_L	u_E	u_F	u_M
u_X	1326.63				
u_L	-347.85	4610.69			
u_E	-5.4321	-217.05	2282.51		
u_F	-557.12	1864.44	1290.74	2858.65	
u_M	459.73	-1626.06	-436.96	-1351.83	992.31

Modell C

	u_X	u_L	u_E	u_F	u_M
u_X	1432.6				
u_L	-384.32	4946.19			
u_E	-10.0681	-231.34	2442.77		
u_F	-615.25	1993.67	1368.09	3048.19	
u_M	496.58	-1746.95	-468.08	-1432.11	1058.62

En bra måte å evaluere de ulike modellene er og å studere kovariansmatrisene for de forskjellige modellene. I tabell 4.3 rapporteres den estimerte kovariansmatrisen for de stokastiske effektene, og i tabell 4.4 de genuine restledene for hver modell. Bortsett fra enkelte celler er variansen lavest for Modell B med faste bedriftspesifike effekter, og høyest for modellen A som ikke tillater heterogenitet. Alle de estimerte kovariansmatrisene oppfyller kravet om å være positiv definite, ettersom de beregnede egenverdiene av de ledende

[11] Med "nok" menes her de forkastnings kriteriene som gjelder

prinsipale underdeterminantene til kovariansmatrisen er positive.[12]

4.2. Økonomisk tolkning av resultatene.

I dette avsnittet analyserer vi resultatene utfra økonomisk teori. Vi rapporterer de estimerte elastisitetene og gjør en sammenligning mellom resultatene fra de ulike modellene. Dette gjøres for å evaluere de ulike modellenes utfra økonomisk teori.

For å gi modellene økonomisk tolkning, har vi også beregnet de ulike elastisitetsmålene. I tabell 4.5 rapporteres egenpriselastisitene for både tilbudet og etterspørselen for en gjennomsnittsbedrift i 1990. Alle de estimerte egenpriselastisitetene har forventet fortegn. Men nivåene på elastisitetene i modell A med homogene koeffisienter skiller seg markant fra de to andre modellene. Det kan indikere at modell A ikke fanger opp forskjellen mellom bedriftene. Ingen av de variable innsatsfaktorene har en egenpriselastisitet over en. Kun en krysspriselastisitet er høyere en, og det er i modell A mellom annet brensel og elektrisitet. I modell B og C er den samme elastisiteten henholdsvis 0.52 og 0.55. Det er helt i tråd med tidligere studier, se for eksempel Biørn et al (1998) og Døhl (2001).

Vi har også estimert kapitalens betydning for tilbud og etterspørselen, som rapporteres i tabell 4.6. Her skiller også Modell A med homogene koeffisienter seg ut fra de to andre modellene. Både med hensyn på fortegn og nivå på estimatene. Det er ingen store forskjeller mellom Modell B og C, bortsett fra at elastisiteten mellom kapital og arbeidskraft er positiv i modellen med faste effekter mens den er negativ i den stokastiske modellen. I begge tilfellene er de imidlertid omtrent null. Den høyeste elastisiteten finner vi mellom kapital og brensel, der en prosent økning av kapitalen gir en halv prosent reduksjon av etterspørselen etter brensel. Det tyder på at investeringene er svært energisparende. Men samtidig gir det en økning i elektrisitetsetterspørselen, men ikke i samme grad.

Tabell 4.5. Egenpris- og krysspriselastisiteter for en gjennomsnittsbedrift år 1990. Modell A

	Output	Arbeids-kraft	Elektri-sitet	Brensel	Material
Output	0.177	0.249	-0.026	-0.063	0.021
Arbeidskraft	-0.003	-0.051	0.020	0.028	0.005
Elektrisitet	0.003	0.213	-0.083	-0.123	-0.010
Brensel	0.009	1.233	-0.514	-0.288	-0.042
Material	-0.036	0.903	-0.166	-0.161	-0.124

Modell B

	Output	Arbeids-kraft	Elektri-sitet	Brensel	Material
Output	0.181	0.203	-0.017	-0.020	0.017
Arbeidskraft	-0.002	-0.029	0.017	0.012	0.003
Elektrisitet	0.002	0.177	-0.141	-0.035	-0.003
Brensel	0.003	0.521	-0.148	-.122	-0.023
Material	-0.030	0.447	-0.041	-0.087	-0.47

Modell C

	Output	Arbeids-kraft	Elektri-sitet	Brensel	Material
Output	0.156	0.189	-0.022	-0.023	0.016
Arbeidskraft	-0.002	-0.030	0.017	0.012	0.003
Elektrisitet	0.003	0.174	-0.138	-0.036	-0.003
Brensel	0.003	0.546	-0.150	-0.159	-0.021
Material	-0.028	0.435	-0.056	-0.082	-0.155

Teknisk utvikling kan tolkes med hjelp av tidskoeffisienten. Den er antatt å være konstant over tid, hvilket medfører at den årlige tekniske forandringen (ε_{xt}) approksimativt kan beregnes som $\varepsilon_{xt} = \frac{\partial x}{\partial t}\frac{1}{x}$. Den tekniske forandringen er rapportert i tabell 4.6. Det framgår klart at det ikke har vært en nøytral teknisk endring, ettersom tidseffekten på etterspørslene har ulike fortegn. I dette tilfelle skiller ikke den homogene modellen seg ut, den har like fortegn for alle faktorer unntatt for materialer. Merk at i motsetning til de andre variable innsatsfaktorene øker etterspørselen på elektrisitet over tid.

Tabell 4.6 Elastisiteten mellom kapital, tid og output og innsatsfaktorene for en gjennomsnittsbedrift år 1990

	Modell A. Homogene koeffisienter	Modell B Faste effekter	Modell C Stokastiske effekter
El(xk)	0.375	0.976	0.443
El(lk)	-0.123	0.038	-0.003
El(ek)	0.461	0.126	0.173
El(fk)	0.563	-0.472	-0.458
El(mk)	0.566	-0.097	-0.067
ε_{Xt}	0.0040	0.0119	0.0115
ε_{Lt}	-0.0038	-0.0063	-0.0048
ε_{Et}	0.0226	0.0316	0.0303
ε_{Ft}	-0.0194	-0.0060	-0.0062
ε_{Mt}	-0.0049	0.0078	0.0069

[12] Når X og Y er to stokastiske variable vet vi at $\mathrm{Var}(X)>0$ og $\mathrm{Var}(Y)>0$. Vi vet videre at korrelasjonskoeffisienten er gitt ved

$$a)\, corr(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} \Rightarrow \left[corr(X,Y)\right]^2 = \frac{\left[cov(X,Y)\right]^2}{Var(X)\,Var(Y)}$$

Når en har to ikke-perfekt korrelerte variable er $b)\left|corr(X,Y)\right| < 1$

La kovariansmatrisen til X,Y være gitt ved

$$c)\; S = \begin{bmatrix} Var(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & Var(Y) \end{bmatrix}$$

Dette medfører at dersom a) og b) skal holde så må S i c) være positive definite. I henhold til Sydsæter (1990) kapittel 4, setning 4.2, vet vi at en vilkårlig n×n matrise er positive definite dersom alle de ledende prinsipale underdeterminantene er positive. Disse resultatene kan generaliseres til en situasjon med flere enn 2 variable.

5. Konklusjon

Vi har i denne studien vist at modellering av heterogenitet er viktig. Hvis man ikke tar hensyn til heterogenitet kan det gi skjeve estimater, da bedriftsforskjeller som ikke er observerbare kan påvirke resultatene. Hvordan man modellerer heterogeniteten, enten med faste dummy koeffisienter eller stokastiske koeffisienter, synes å ha betydning når det gjelder effisisens. Våre resultater indikerer at modellen med faste bedriftsspesifikke koeffisienter gir mer effisiente estimater. Det kreves imidlertid flere tester for å fastslå dette sikkert. Våre estimater viser dog at valg av metode for å modellere heterogenitet har liten innvirkning på selve resultatene.

Referanser

Akaike, H. (1987), "Factor Analysis and AIC," *Psychometrika*, **52**, 317 -332

Biørn, E. (1995), *Anvendt økonometri - utvalgte emner* (kapittel 1-9). Kompendium utgitt av Akademika - Unipub.

Biørn, E. (2000a), *Økonometrisk analyse av paneldata - en innføring*. Del 1. Kompendium utgitt av Akademika - Unipub.

Biørn, E. (2000b), *Økonometrisk analyse av paneldata - en innføring*. Del 2. Kompendium utgitt av Akademika - Unipub.

Biørn, E., K.G. Lindquist and T. Skjerpen (1998), Random Coefficients and Unbalanced Panels: An Application on Data from Norwegian Chemical Plants. Discussion Papers 235, Statistisk sentralbyrå.

Christensen, L. R, W. W. Jorgensen og L. J. Lau, (1971), "Conjugate Duality and the Transcendital Logarithmic Production function", *Econometrica,* **39**, 255-256.

Diewert W. E. M., (1973), Functional forms for profit and Transformation Functions", *Journal of Economic Theory*, **6**, 284-316.

Døhl, Ø. (2001), Energy flexibility and technological progress with Multioutput production: Application on Norwegian pulp and paper industries. Kommer i serien DP. Statistisk sentralbyrå.

Green, W. H. (1993): *Econometric analysis*, second edition. New York. Macmillian.

Hausman, J. A, (1978), "Specification Tests in Econometrics", *Econometrica*, **46**, 1251-1271.

Hausman, J. A og W. E., (1981), "Panel Data and Unobservable Individual Effects", *Econometrica*, **49**, 455-473.

Khuri, A.I., T. Mathew and B. K. Sinha (1998): *Statistical tests for mixed linear models.* New York: Wiley.

Lau L. J. (1978), "Applications of Productions functions" i *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications*, ed av M. Fuss og D. McFadden, NorthHolland, 269-286.

SAS (1999), *SAS OnlineDoc version eight*, Cary, NC: SAS Institute Inc.

Swartz , G. (1978), "Estimating the Dimension of a Model," *Annals of Statistics*, **6**, 461 -464

Sydsæter, K. (1990), *Matematisk analyse. Bind 2.* Oslo: Universitetsforlaget.

Wald, A. (1943), "Tests of Statistical Hypotheses Concerning General Parameters When the Number of Observations Is Large," *Transactions of the American Mathematical Society*, **54**, 426 -482.

Vedlegg A

Program PROC MIXED SAS/STAT

```
options PS=55 LS=80 NOCENTER nodate;
title ' GL profit function';
title2 'Demand and Supply functions with
homogeneous functions';
* Estimering av modell A1;
proc mixed data=data.s34GL method=ml
asycov mmeqsol maxiter=1000 ;
class bed aar;
where lig ne 6;
model profit = gaxx gaxl gaxe gaxf gaxm
gall gale galf galm
     gaee gaef gaem gaff gafm gamm
     galk galt gaek gaet gafk gaft gamk
gamt gaxk gaxt/ noint s;
repeated / type=un sub=bed(aar) r;

estimate 'gaxx' gaxx 1;
estimate 'gaxl' gaxl 1;
estimate 'gaxe' gaxe 1;
estimate 'gaxf' gaxf 1;
estimate 'gaxm' gaxl 1;
estimate 'gall' gall 1;
estimate 'gale' gale 1;
estimate 'galf' galf 1;
estimate 'galm' galm 1;
estimate 'gaee' gaee 1;
estimate 'gaef' gaef 1;
estimate 'gaem' gaem 1;
estimate 'gaff' gaff 1;
estimate 'gafm' gafm 1;
estimate 'gamm' gamm 1;
estimate 'galk' galk 1;
estimate 'galt' galt 1;
estimate 'gaek' gaek 1;
estimate 'gaet' gaet 1;
estimate 'gafk' gafk 1;
estimate 'gaft' gaft 1;
estimate 'gamk' gamk 1;
estimate 'gamt' gamt 1;
estimate 'gaxk' gaxk 1;
estimate 'gaxt' gaxt 1;
ods output Estimates=taba1;
ods output MMEQSOL=mmeqsa1;
ods output AsyCov=asya1;
ods output SolutionF=fixa1;
ods output listing exclude all;
run ;


* Estimering av modell A2;
title2 'Demand and Supply functions with
fixed effects';

proc mixed data=data.s34GL method=ml
asycov mmeqsol maxiter=1000 ;
class bed aar;
where lig ne 6;
model profit = gaxx(bed) gaxl gaxe gaxf
gaxm gall(bed) gale galf galm
     gaee(bed) gaef gaem gaff(bed) gafm
gamm(bed)
     galk galt gaek gaet gafk gaft gamk
gamt gaxk gaxt/ noint s;
repeated / type=un sub=bed(aar) r;

estimate 'gaxx' gaxx(bed) 1;
estimate 'gaxl' gaxl 1;
estimate 'gaxe' gaxe 1;
estimate 'gaxf' gaxf 1;
estimate 'gaxm' gaxl 1;
estimate 'gall' gall(bed) 1;
estimate 'gale' gale 1;
estimate 'galf' galf 1;
estimate 'galm' galm 1;
estimate 'gaee' gaee(bed) 1;
estimate 'gaef' gaef 1;
estimate 'gaem' gaem 1;
estimate 'gaff' gaff(bed) 1;
estimate 'gafm' gafm 1;
estimate 'gamm' gamm(bed) 1;
estimate 'galk' galk 1;
estimate 'galt' galt 1;
estimate 'gaek' gaek 1;
estimate 'gaet' gaet 1;
estimate 'gafk' gafk 1;
estimate 'gaft' gaft 1;
estimate 'gamk' gamk 1;
estimate 'gamt' gamt 1;
estimate 'gaxk' gaxk 1;
estimate 'gaxt' gaxt 1;


ods output Estimates=taba2;
ods output MMEQSOL=mmeqsa2;
ods output AsyCov=asya2;
ods output SolutionF=fixa2;
ods output listing exclude all;

run ;



* Estimering av modell A3;
title2 'Demand and Supply functions with
random effects';
proc mixed data=data.s34GL method=ml
asycov mmeqsol maxiter=1000 ;
class bed aar;
where lig ne 6;
model profit = gaxx gaxl gaxe gaxf gaxm
gall gale galf galm
     gaee gaef gaem gaff gafm gamm
     galk galt gaek gaet gafk gaft gamk
gamt gaxk gaxt/ noint s;
random gaxx gall gaee gaff gamm/type=un
sub=bed s;
```

```
repeated / type=un sub=bed(aar) r;

estimate 'gaxx' gaxx 1;
estimate 'gaxl' gaxl 1;
estimate 'gaxe' gaxe 1;
estimate 'gaxf' gaxf 1;
estimate 'gaxm' gaxl 1;
estimate 'gall' gall 1;
estimate 'gale' gale 1;
estimate 'galf' galf 1;
estimate 'galm' galm 1;
estimate 'gaee' gaee 1;
estimate 'gaef' gaef 1;
estimate 'gaem' gaem 1;
estimate 'gaff' gaff 1;
estimate 'gafm' gafm 1;
estimate 'gamm' gamm 1;
estimate 'galk' galk 1;
estimate 'galt' galt 1;
estimate 'gaek' gaek 1;
estimate 'gaet' gaet 1;
estimate 'gafk' gafk 1;
estimate 'gaft' gaft 1;
estimate 'gamk' gamk 1;
estimate 'gamt' gamt 1;
estimate 'gaxk' gaxk 1;
estimate 'gaxt' gaxt 1;


ods output Estimates=taba3;
ods output MMEQSOL=mmeqsa3;
ods output AsyCov=asya3;
ods output SolutionF=fixa3;
ods output SulotionR=rana3;
ods output listing exclude all;

run ;
```

De sist utgitte publikasjonene i serien Rapporter

Recent publications in the series Reports

2000/26 T.A. Johnsen, F.R. Aune og A. Vik: The Norwegian Electricity Market: Is There Enough Generation Capacity Today and Will There Be Sufficient Capacity in Coming Years?. 2000. 49s. 140 kr inkl. mva. ISBN 82-537-4859-0

2000/27 K. Mork, T. Smith og J. Hass: Ressurs-innsats, utslipp og rensing i den kommu-nale avløpssektoren. 1999. 2000. 66s. 155 kr inkl. mva. ISBN 82-537-4862-0

2000/28 A. Thomassen: Byggekostnadsindeks for boliger. Definisjoner og beregningsmetode. Vekter og representantvarer 2000. 2000. 72s. 155 kr inkl. mva. ISBN 82-537- 4867-1

2001/1 Use of ICT in Nordic enterprises 1999/ 2000. 2001. 28s. 155 kr inkl. mva. ISBN 82-537-4873-6

2001/2 B. Havorsen, B.M. Larsen og R. Nesbakken: Hvordan utnytte resultater fra mikroøkono-metriske analyser av husholdningenes energiforbruk i makromodeller? En disku-sjon av teoretisk og empirisk litteratur og aggregering. 59s. 180 kr inkl. mva. ISBN 82-537-4879-5

2001/3 M. Rønsen: Market work, child care and the division of household labour. Adapta-tions of Norwegian mothers before and after the cash-for-care reform. 2001. 35s. 155 kr inkl. mva. ISBN 82-537-4881-7

2001/4 A.L. Brathaug, H. Brunborg, E. Skretting Lunde, E. Nørgaard og Å. Vigran: Utvik-lingen av aldersrelaerte helse-, pleie og omsorgsutgifter. 2001. 46s. 155 kr inkl. mva. ISBN 82-537-4900-7

2001/5 L. Håkonsen, T. Kornstad, K. Løyland og T. O. Thoresen: Kontantstøtten- effekter på arbeidstilbud og inntektsfordeling. 2001. 67s. 180 kr inkl.mva. ISBN 82-537-4901-5

2001/6 B. Tornsjø: Utslipp til luft fra innenriks sjøfart, fiske og annen sjøtrafikk mellom norske havner. 2001. 36s. 155 kr inkl. mva. ISBN 82-537-4903-1

2001/7 M. Sollie og I. Svendsen: En økonometrisk studie av arbeidstilbudet i Norge. 2001. 94s. 150 kr inkl. mva. ISBN 82-537-4907-4

2001/8 E. Nørgaard: Finansiering av helse- og sosialutgifter i Norge 1990-1998. 2001. 45s. 155 kr inkl. mva. ISBN 82-537-4908-2

2001/9 J. Epland: Barn i husholdninger med lav inntekt: Omfang, utvikling, årsaker. 2001. 43s. 155 kr inkl. mva. ISBN 82-537-4925-2

2001/10 A. Krüger Enge: Prisindeks for tenesteytande næringar. 2001. 35s. 155 kr inkl. mva. ISBN 82-537-4920-1

2001/11 L.H. Thingstad: Avanseundersøking for engroshandel. 2001. 63s. 180 kr inkl. mva. ISBN 82-537-4919-8

2001/12 J. Holmøy: Pleie- og omsorgstjenester 1995-1999: Noen hovedtall basert på GERIX-data. 2001. 69s. 180 kr inkl. mva. ISBN 82-537-4927-9

2001/13 H.M. Edvardsen: Hovedstadsområdets nasjonale rolle, del 1: Hovedstadsregionens plass i den regionale arbeidsdeling. Hvordan er næringskonsentrasjonene i regionen knyttet til næringskonsen-trasjonene i resten av landet? 2001. 39s. 155 kr inkl. mva. ISBN 82-537-4928-7

2001/14 T. Martinsen: Energibruk i norsk industri. 2001. 78s. 180 kr inkl. mva. ISBN 82-537-4929-5

2001/15 E. Kvingedal: Indikatorer for energibruk og utslipp til luft i industri- og energisektorene. 2001. 38s. 155 kr inkl. mva. ISBN 82-537-4930-9

2001/16 S. Holtskog: Direkte energibruk og utslipp til luft fra transport i Norge 1994 og 1998. 2001. 49s. 150 kr. inkl. mva. ISBN 82-537-4953-8

2001/17 A. Finstad, G. Haakonsen, E. Kvingedal og K. Rypdal: Utslipp til luft av noen miljøgifter i Norge. Dokumentasjon av metode og resultater. 2001. 64s. 180 kr inkl. mva. ISBN 82-537-4954-6

2001/18 T. Fæhn, J.A. Jørgensen, B. Strøm, T. Åvitsland og W. Drzwi: Effektive satser for næringsstøtte 1998. Beregninger som inkluderer skatteutgifter. 2001. 69s. 180 kr inkl. mva. ISBN 82-537-4955-4