Arbeidsnotater

STATISTISK SENTRALBYRÅ

OSLO: Postboks 8131 Dep, Oslo 1
Tlf. (02) *41 38 20

KONGSVINGER: Postboks 510, Stasjonssida, 2201 Kongsvinger
Tlf. (066) *14 988

IO 78/22

6. september 1978

VALGHANDLINGSTEORI NÅR MENGDEN AV ALTERNATIVER ER ENDELIG. KONSEKVENSER FOR ANALYSE AV YRKESDELTAKINGEN.

av

John Dagsvik[x)]

Innhold

		Side
1.	Innledning	1
2.	Valghandlingteori når mengden av alternativer er endelig	3
2.1	Bakgrunn	3
2.2	Generell beskrivelse av teorien	3
2.3	Sammenlikning med tradisjonell mikroøkonomisk teori	5
2.4	Teorier for desisjonsmodellen	7
2.5	Aggregering	12
2.6	Heterogenitet når populasjonen observeres ved flere tidspunkter	13
2.7	Prediksjon på grunnlag av utvalgsdata når populasjonen er heterogen	17
2.8	Prediksjon på grunnlag av utvalgsdata når populasjonen er homogen med tidsavhengige stokastiske overgangssannsynligheter	18
3.	Arbeidskraftanalyser	20
3.1	Formål	20
3.2	Heterogene modeller for sekvensiell yrkesdeltaking	21
4.	Estimering	25
4.1	Faste smaksparametre	25
4.2	Probitmodellen med stokastiske smaksparametre	26
4.3	Loglit-modellen med stokastiske smaksparametre	26
4.4	Hypotesetesting	30
	Referanser	33

x) Jeg takker for nyttige kommentarer fra Per Sevaldson.

S A M M E N D R A G

I de senere årene har økonomer og sosiologer i økende grad tatt i bruk analysemetoder som går under fellesbetegnelsen kvalitativ responsanalyser. Disse metodene er opprinnelig utviklet med tanke på anvendelse i psykologi og de tar sitt utgangspunkt i individuell valghandling når mengden av alternativer er endelig.

I dette notatet gis det en oversikt over deler av denne teorien som kan ha interesse for noen av prosjektene i Sosiodemografisk forskningsgruppe.

Vi har spesielt drøftet metodene i tilknytning til prosjektet "Analyse av faktorer som påvirker yrkesdeltakingen".

1. Innledning

Arbeidet i Sosiodemografisk forskningsgruppe har blant annet som mål å utvikle modeller som kan brukes til framskrivning av befolkningsgrupper. En studerer befolkningen inndelt i grupper (tilstander) etter sosiale, demografiske, geografiske og økonomiske kjennetegn med sikte på å etablere strukturrelasjoner. I dette arbeidet er matematiske-statistiske modeller og analyseteknikker viktige som hjelpemiddel. Det er to hovedgrunner til dette. I kompliserte analyser med store datamasser er det vesentlig å ha raffinerte analysemetoder som kan belyse problemstillinger hvor enkle metoder ikke strekker til og i verste fall gir feilaktige resultat.

Minst like viktig er kanskje behovet for å benytte det matematiske språk og begrepsapparat i modellbyggingen. Mange problemstillinger og hypoteser kan vanskelig gis en presis og konsistent formulering uten å benytte begrepene fra matematisk statistikk.

Det foreliggende notatet er et forsøk på å beskrive noen matematiske modelltyper og analyseteknikker som kan være nyttige i gruppas analysearbeid.

I de senere årene er det utviklet metoder som tar sitt utgangspunkt i individuell valghandling når mengden av alternativer er endelig. Kvalitative valg- eller kvalitative respons analyser (Quantal choice) er fellesbetegnelser som benyttes på slike metoder. Metodene som ligger til grunn er opprinnelig utviklet med tanke på anvendelse i psykologi men benyttes i økende grad i andre anvendelser.

I dette notatet skal jeg gi en kort oversikt over enkelte deler av kvalitativ valghandlingsteori som har interesse for noen av gruppas prosjekter. Vi skal videre se på de praktiske konsekvensene av denne teorien og aktuelle strategier for estimering og testing av de avledede modeller. Den anvendelsen vi spesielt er interessert i er analyse av faktorer som påvirker yrkesdeltakingen men metodene har også interesse for andre anvendelser.

I en analyse av yrkesmobilitet formulerte Blumen, Kogan og McCarthly (1955) en modell ut fra teorien om at populasjonen var heterogen i den forstand at en ukjent andel var "stayers" og resten "movers". "Movers" er individer som ofte endrer yrke i motsetning til "stayers" som har et stabilt forhold til arbeidsmarkedet. De fant at modellen ga en vesentlig bedre beskrivelse av yrkesmobilitet enn en modell basert på antagelsen om at populasjonen var homogen.

Modeller som tar hensyn til heterogenitet har senere blitt formulert i mer generelle versjoner og i andre sammenhenger. La oss med et enkelt eksempel gi en motivasjon for å anta heterogenitet. La

$$Y_j = \beta X_j + u_j$$

være en modell for j-te individ hvor Y_j er en endogen og X_j en eksogen variabel knyttet til individet, u_j er et stokastisk restledd med forventning null og β er en ukjent parameter. Anta nå at vi på grunn av målefeil eller dikotomisering ikke observerer X_j men istedet X_j^*. Vi har dermed modellen

$$Y_j = (\beta X_j / X_j^*) X_j^* + u_j = \alpha_j X_j^* + u_j ,$$

hvor $\alpha_j = \beta X_j / X_j^*$

I den observerbare modellen er altså koeffisienten individspesifikk idet den avhenger av j. Den kan derfor variere over populasjonen, m.a.o. er populasjonen heterogen. I dette notatet er forutsetningen om heterogenitet sentralt i modellformuleringene. Dette er imidlertid ikke uproblematisk. De modellene fra kvalitativ responsanalyse som i dag benyttes i konkrete analyser er i det overveiende antall tilfeller basert på forutsetning om homogenitet. Grunnen til dette er at de matematiske uttrykkene blir uhåndterlig i heterogenitetsituasjonen og leder til dyre og kompliserte estimeringsprosedyrer når antall alternativer er større enn to.

Vi foreslår her en ny modelltype som vi har kalt loglit-modellen. Denne modellen fører til enklere estimeringsrutiner enn generaliseringer av logit og probit-modellene til heterogenitetsituasjonen, men det gjenstår å utprøve denne i praksis.

Vi har imidlertid også skissert en markovmodell som kan benyttes når populasjonen er homogen men med overgangssannsynligheter som varierer omkring et nivå. Denne modellen har ikke direkte tilknytning til resten av notatet siden den ikke inneholder eksogene variable, men vi skisserer ideen som et mulig alternativ ved estimering og prediksjon ved løpende utvalgsundersøkelser.

I denne omgang har jeg ikke hatt anledning til å utprøve disse metodene på aktuelle data. Jeg håper imidlertid å komme tilbake til praktiske anvendelser på Byråets data.

Anvendelse av kvalitativ valghandlingsteori er også planlagt av andre i Byrået. Hernæs (1978) drøfter muligheten av å benytte disse metodene for å analysere utdanningsadferd og Brunborg (1978) tar sikte på å analysere prevensjonsadferd ved hjelp av slike strategier.

2. VALGHANDLINGSTEORI NÅR MENGDEN AV ALTERNATIVER ER ENDELIG

2.1. Bakgrunn

I tradisjonell økonomisk teori for konsumadferd er mengden av etterspurte goder antatt å variere kontinuerlig. Mange viktige handlinger som individer og husholdninger utfører er imidlertid resultater av valg mellom diskrete alternativer. Dette gjelder anvendelser innen demografi som for eksempel analyse av flytting, sivilstandsrelasjoner, faktorer som bestemmer familiestørrelsen og arbeidskraftmobilitet. I slike situasjoner er den tradisjonelle teorien ikke uten videre anvendbar.

Problemet er at det i anvendelsen ofte vil være en vesentlig andel av kjennetegnene for individene og alternativene som er ikke-observerbare. Når mengden av alternativer er endelig medfører dette at variasjoner i aggregert etterspørsel ikke uten videre kan tolkes som et resultat av felles variasjon (pluss et restledd) i den individuelle etterspørsel.

Vi skal her gi en generell oversikt over enkelte deler av teorien som har spesiell interesse. Oversikten er basert på arbeider av blant annet McFadden men vi antyder også modelltyper som ikke er behandlet i litteraturen tidligere.

2.2. Generell beskrivelse av teorien

Modeller for individuell valghandling ble,som nevnt innledningsvis, først studert av psykologer. Thurstone (1927) lanserte en type modeller som senere er blitt kalt henholdsvis Thurstone-modeller og stokastiske nyttemodeller. Luce (1959) utviklet en type modeller som senere er blitt kalt konstante nyttemodeller. (Se Luce and Suppes (1965).) Disse to modelltypene synes ved første øyekast å være vesentlig forskjellige. Luce teori har som utgangspunkt et aksiom som leder til bestemte restriksjoner på mengden av mulige valgsannsynligheter. I stokastiske nyttemodeller representeres valgalternativene ved stokastiske variable hvor individet velger det alternativet som har høyest variabelverdi.

I virkeligheten er det en nær sammenheng mellom de to modelltypene. Det kan vises under svake forutsetninger, at en versjon av Thurstone-modellen er ekvivalent med Luce modell.

Vi skal i det etterfølgende bare behandle stokastiske nyttemodeller blant annet fordi utgangspunktet i denne teorien er analog til betraktningsmåten i mikroøkonomisk teori.

En teori for individuell valghandling kan defineres ved; i) "Valgobjekter" med observerte egenskaper (attributter) og mengder av slike objekter (alternativer) som er tilgjengelige for de respektive velgere. ii) Observerte karakteristika ved velgerne. iii) En individuell desisjonsmodell og en fordeling av desisjonsregler over populasjonen. (Jfr. McFadden (1973) og (1977).) La Z være mengden av alle valgobjekter og X mengden av vektorer med de observerte kjennetegnene til velgerne. Et tilfeldig uttrukket individ fra populasjonen med kjennetegnvektor $x \varepsilon X$ antas å stå foran et valg blant en mengde alternativer $B \subset Z$. La $P(j|x,B)$ betegne den betingede sannsynlighet for at et individ vil velge alternativ j gitt at individet har kjennetegnvektor x og at $j \varepsilon B$. En individuell desisjonsregel er en funksjon av (x,B) som avbilder (x,B) i et element i B.

En individuell desisjonsmodell er en mengde av desisjonsregler H. Til H er det knyttet en sannsynlighetsfordeling π definert på undermengder av H som gir fordelingen av desisjonsregler i populasjonen. I følge notasjonen ovenfor har vi altså

$$P(j|x,B) = \pi\{h \varepsilon H | h(x,B)=j\}.$$

Dvs. sannsynligheten for at et individ vil velge j gitt kjennetegnvektor x og mengden av tilgjengelige alternativer B er lik sannsynligheten for at individet skal ha en desisjonsregel som nettopp gir dette valget.

Formalismen ovenfor er ennå altfor generell og abstrakt til å være brukbar. Vi antar nå at det til hvert individ med kjennetegnvektor x er knyttet en preferansefunksjon $U(z_j,x)$ som angir preferanseverdien individet har for alternativ j karakterisert ved en variabelvektor z_j.

På grunn av uobserverbare variable for alternativene betraktes denne funksjonen som stokastisk. Videre vil preferansefunksjonen variere over individgrupper med identisk observerbare kjennetegn p.g.a. uobserverte kjennetegn for individene. Vi har altså tilfeldig variasjon av nyttefunksjonen for hvert individ som skyldes at individet ikke bare rangerer alternativene på grunnlag av de observerte attributtene men også tar hensyn til annen informasjon (eller mangel på sådan). Den tilfeldige variasjon av nyttefunksjonen fra individ til individ skyldes hva vi kan kalle "smaksforskjeller". Desisjonsregelen h er at individet velger det alternativet som har størst verdi av nyttefunksjonen. Altså er

(2.1) $P(z_j|x,B) = \Pr\{U(z_j,x) > U(z_k,x) \text{ for alle } k \neq j\}$

hvor $B = \{z_1, z_2, \ldots, z_{j(x)}\}$ (j avhenger av x),

2.3. Sammenlikning med tradisjonell mikroøkonomisk teori

Den generelle teorien for individuell nyttemaksimering gir i prinsippet en fullstendig modell for individuell valghandling. Nyttefunksjonen for det i-te individ maksimeres under budsjettbetingelsen $z \varepsilon B_i$ for en verdi z. Dette gir et system av etterspørselsrelasjoner for bestemmelse av z;

$$z_i = d(B_i, x^i, \varepsilon_i).$$

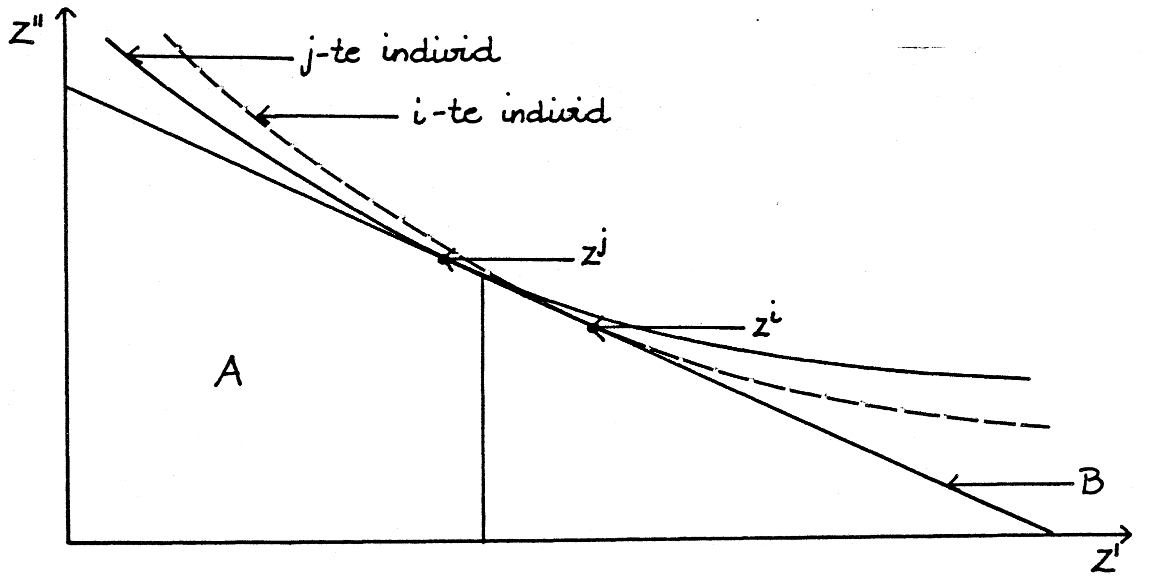
hvor ε_i er en vektor av uobserverbare karakteristika for individet.

I anvendelser observeres (B_i, z_i, x^i) for en gruppe individer $i = 1, 2, \ldots, n$, som benyttes til estimering og testing av den avledede modellen. Den uobserverte størrelsen ε_i varierer fra individ til individ og medfører variasjoner i observert etterspørsel blant individer med like observerbare kjennetegn. Betrakt en slik gruppe individer med like budsjettverdier og like verdier av x.

Antar vi at nyttefunksjonen er kontinuerlig vil små variasjoner i nyttefunksjonen U gi små variasjoner i z_i. Dvs. U vil maksimeres for en verdi $\bar{z} + v_i$ hvor v_i er et "lite" stokastisk restledd som varierer fra individ til individ.

Observert etterspørsel er altså tilfeldig fordelt omkring en felles verdi $\bar{z}$ slik at variasjoner i aggregert etterspørsel kan tolkes som et resultat av felles variasjoner i den enkelte individuelle etterspørsel. I situasjoner hvor valget står mellom diskrete alternativer kan imidlertid denne betraktningsmåten være uholdbar. Vi kan nemlig risikere at små endringer i nyttefunksjonen fra individ til individ medfører at individet skifter fra et alternativ til et annet.

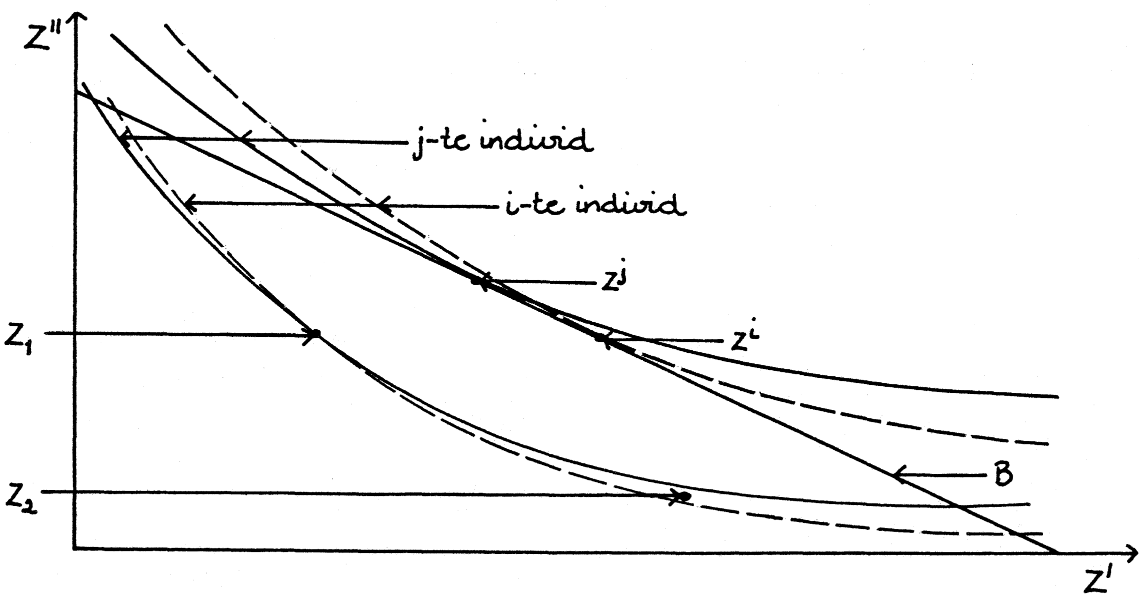
La oss se nærmere på situasjonen hvor valget står mellom to alternativer beskrevet ved henholdsvis z_1 og z_2. Vi vil beskrive to varianter, I og II av denne situasjonene. I situasjon I utgjør mengden av alternativer et kontinuum. Den observerte etterspørsel er lik z_1 dersom den "reelle" etterspørsel er inneholdt i en mengde A og lik z_2 i det motsatte tilfelle. Figuren nedenfor illustrerer situasjonen.



Av illustrasjonshensyn betrakter vi stadig grupper av individer med like observerbare kjennetegn. På figuren er z en vektor med to komponenter (z', z''). Den individuelle nyttefunksjonen er opptil monoton i begge komponentene og indifferenskurvene (dvs. kurvene hvor U er konstant) for to individer i og j er tegnet gjennom de respektive markedspunkter (dvs. nyttemaksimum innenfor budsjettbetingelsen). På figuren ligger z^j i A og z^i utenfor A hvilket betyr at i velger z_2 og j velger z_1. Punktene z^i og z^j kan altså ligge nær hverandre men likevel gi helt ulik observert etterspørsel.

I situasjon II er tilbudet slik at individet må velge mellom de to alternativene z_1 og z_2 som begge ligger innenfor området bestemt av budsjettbetingelsen. Budsjettet behøver ikke å "brukes opp" på z_1 eller z_2. Vi kan tenke oss tre alternativer slik at dersom budsjettet ikke utnyttes fullt ut ved valget av z_1 eller z_2 vil den resterende del av budsjettet brukes på et tredje gode.

Det kan være instruktivt å tenke seg at dersom det fantes alternativer med alle mulige variasjoner i z-verdiene kunne valgadferden beskrives som i det kontinuerlige tilfelle.



På denne figuren er indifferenskurvene tegnet inn for to nivåer. Kurvene lengst til høyre tangerer budsjettlinjen og gir følgelig de respektive ønskede alternativer z^i og z^j. Indifferenskurvene til venstre er tegnet inn gjennom ett av de to tilbudte alternativene z_1. Siden en del av disse kurvene ligger til venstre for budsjettlinjen kan z_2 ligge på eller like ved en av kurvene. Selv om de ønskede markedspunkter ligger nær hverandre kan de to indifferenskurvene som går gjennom z_1 gå på hver sin side av z_2. På figuren ser vi at i-te individ velger z_2 mens j-te individ velger z_1. En liten endring i nyttefunksjonen fra et individ til et annet kan altså føre til valg av forskjellige alternativer. Det kan derfor være vesentlig å ta hensyn til de stokastiske variasjonene i de individuelle nyttefunksjonene.

2.4. Teorier for desisjonsmodellen

Uten inskrenkinger kan vi skrive nyttefunksjonen på følgende form

(2.2) $U(z, x) = V(z, x) + e(z, x)$

hvor V er en ikke-stokastisk funksjon av x og z mens e er stokastisk og uttrykker effekten av de ikke-observerte variable. Restleddet e har forventing null. Budsjettbetingelsen for i-te individ definerer de tilgjengelige alternativer for individet. Alternativene $j = 1, 2, \ldots, J$ beskrives ved vektorene $z_1, z_2, \ldots, z_J$. Budsjettbetingelsen B_i er altså en funksjon av $\{z_1, z_2, \ldots, z_J\}$ som gir mengden av tilgjengelige alternativer $j = 1, 2, \ldots, J_i$ $(J_i \leq J)$ for individet.

For at modellen skal være bestemt må vi fastlegge funksjonsformen V og den simultane sannsynlighetsfordeling for $e(z_j, x)$, $j = 1, 2, \ldots$ for et tilfeldig uttrukket individ med kjennetegn x. I det følgende skal vi anta at U kan skrives på formen

(2.3) $$U(z_j, x) = \sum_r^K \alpha_r R_r(z_j, x) + \varepsilon(z_j, x) = \alpha' R(z_j, x) + \varepsilon(z_j, x)$$

hvor $R_r(z_j,x)$ er helspesifiserte funksjoner av z_j og x, $\varepsilon(z_j, x)$ er en stokastisk nyttekompontent med forventning null som representerer usikkerheten knyttet til individets rangering av alternativene. α_r er smaksparametre som varierer over populasjonen i følge en sannsynlighetsfordeling. Desisjonsregelen for det i-te individ er altså bestemt ved

$$\alpha'(i) R(z_j, x^i) + \varepsilon_i(z_j, x^i)$$

og fordelingen til $\varepsilon(z_j, x)$ for alle j. Her har vi skrevet $\alpha = \alpha(i)$ for å markere at parametrene er individspesifikke.

Desisjonsmodellen H er definert når fordelingen til α og $\varepsilon(z_j, x)$ er bestemt.

La nå α_r ha forventing β_r og varians σ_r^2. Setter vi

(2.4) $$V(z_j, x) = \sum_r \beta_r R_r(z_j, x) = \beta' R(z_j, x)$$

og

(2.5) $$e(z_j, x) = (\alpha' - \beta') R(z_j, x) + \varepsilon(z_j, x)$$

har vi tilbakeført modellen til formen (2.2). Siden valgsannsynlighetene avhenger av nyttefunksjonene via differansene

$$U(z_j, x) - U(z_k, x) = \alpha' [R(z_j, x) - R(z_k, x)] + \varepsilon(z_j, x) - \varepsilon(z_k, x)$$

ser vi at dersom smaksparametrene $\{\alpha_r\}$ har mye større varians enn nyttekomponentene $\{\varepsilon(z_j, x)\}$ vil valg mellom alternativer som har vesentlige forskjeller i attributter styres av fordelingen for $\{\alpha_r\}$ fordi $R(z_j, x) - R(z_k, x)$ da vil være stor i tallverdi. Valg mellom like eller nesten like alternativer vil styres av fordelingen til $\{\varepsilon(z_j, x)\}$ fordi $R(z_j, x) - R(z_k, x)$ er nær null.

Dersom antall alternativer $t > 2$ har en hittil ikke lykkes i å uttrykke valgsannsynlighetene ved "eksplisitte" formler bortsett fra tilfellet når $\sigma_r^2 = 0$ og restleddene $\{\varepsilon(z_j, x)\}$ er uavhengige og identisk fordelte med dobbeleksponensiell fordelingsfunksjon $\exp(-ae^{bx})$. I dette tilfelle får vi den multinomiske logitmodellen for valgsannsynligheten gitt ved

(2.6) $$p_j = P(z_j | x, B) = \frac{\exp V_j}{\sum_{z_k \varepsilon B} \exp V_k}$$

hvor $V_j = V(z_j, x)$.

Denne modellen har spesiell interesse fordi den har gode estimeringstekniske egenskaper. Dessuten er den konsistent med Luce aksiom "uavhengighet av irrelevante alternativer". Dette aksiomet ble postulert av Luce (1959) og sier følgende:

La $R \subset T \subset Z$ og la $P_T(j)$ betegne sannsyligheten for at element j velges blant elementene i T. Anta at $P_Z(j)$ er forskjellig fra 0 og 1 for alle j og at Z er endelig. Da skal sammenhengen

$$P_T(j) = P_T(R)P_R(j), \quad j \in R \subset T \subset Z.$$

Sannsynligheten for å velge et alternativ j blant delmengden T er lik sannsynligheten for først å velge en delmengde R av alternativer som ligger i T og inneholder j, multiplisert med sannsynligheten for å velge j fra R. Valgaksiomet sier altså at valgsannsynlighetene følger lovene for betinget sannsynlighet.

Valgaksiomet medfører at det eksisterer en ordinal målestokk av preferanser slik at en kan finne konstanter w_j knyttet til alternativ j som er et mål for tiltrekningskraften, eller responsstyrken til j-te alternativ. Disse $\{w_j\}$ innføres på følgende måte:

La q være et vilkårlig element i Z og definer

$$w_j = \frac{P_{\{j,q\}}(j)}{P_{\{j,q\}}(q)} = \frac{P_Z(j)}{P_Z(q)}$$

Den siste likheten følger av valgaksiomet. Det er nå lett å innse at

$$P_T(j) = w_j \Big/ \sum_{i \in T} w_i \qquad \text{for } T \subset Z$$

og at $w_1, w_2, \ldots$ er entydige på multiplikasjon av en konstant nær. Anta nemlig at et element $p \neq q$ velges ut istedet for q. Da er

$$w_j' = \frac{P_Z(j)}{P_Z(p)} = \frac{P_Z(q)}{P_Z(p)} w_j = cw_j.$$

Innfører vi $v_j = \log w_j$ får vi den multinomiske logit-modellen. Det kan omvendt vises (McFadden (1973) og mer generelt Yellott (1977)) at dersom vi begrenser oss til fordelingsfunksjoner som har karakteristiske funksjoner uten røtter (hvilket er en forutsetning som de vanlige fordelingsfunksjoner oppfyller) og vi antar at restleddene er uavhengige identisk fordelt er den dobbelteksponensielle fordelingsklassen den eneste restleddsfordelingen som medfører at Luce aksiom er oppfylt. Dette er et oppsiktsvekkende resultat og er langt fra trivielt å innse.

Det kan synes intuitivt opplagt at Luce aksiom gjelder i valg-situasjonen men vi skal beskrive eksempler hvor valgmodellen ovenfor ikke gjelder.

Betrakt to alternative reisemål 1 og 2 med responstyrker w_1 og w_2. Anta at det til hver reise knyttes en prisreduksjon med responsstyrke w_3. Sannsynligheten for å velge det første reisemålet blir

$$P_1 = \frac{w_1}{w_1+w_2} .$$

I den andre situasjonen blir sannsynligheten for å velge det første reisemålet

$$P_1' = \frac{w_1+w_3}{w_1+w_2+2w_3}$$

som er forskjellig fra P_1. Imidlertid bør $P_1 = P_1'$ fordi forskjellen mellom alternativene jo er uendret.

La oss se på nok et eksempel. Anta at en gruppe individer står overfor valg mellom alternativene i og j med respektive responsstyrker w_i og $w_j = 2w_i$.

Sannsynligheten for å velge j blir da ifølge valgaksiomet lik 2/3, dvs. ca. 2/3 av gruppen vil velge alternativ j. Innfører vi et nytt alternativ i' som er nesten identisk med i må vi vente å finne at 2/3 av gruppen fremdeles velger j i og med at alternativet i' ikke representerer noe reelt nytt alternativ.

Imidlertid gir valgaksiomet

$$P_j = \frac{w_j}{w_j+w_i+w_{i'}} \approx \frac{w_j}{w_j+2w_i} = 1/2$$

som er forskjellig fra 2/3. Grunnen til dette er at alternativene her ikke er "veldefinerte". Dersom i' er et duplikat av i er det klart at $\{i, i'\}$ må betraktes som <u>ett</u> alternativ med responsstyrke w_j og ikke som to "uavhengige" alternativer. Disse eksemplene viser at realismen i Luce aksiom avhenger av i hvilken grad alternativene kan betraktes som uavhengige/forskjellige.

Anta nå at valgaksiomet gjelder for hvert individ. Da vil ikke nødvendigvis aksiomet gjelde for det representantive individ med mindre $\sigma_r^2 = 0$ for alle r. Dette impliserer at det er vanskelig å teste gyldigheten av aksiomet på data for persongrupper når en ikke har gjentatte observasjoner for hvert individ.

I den binære situasjonen (dvs. J = 2) kan vi uttrykke valgsannsynlighetene eksplisitt dersom vi antar at alle smaksparametrene og nyttekomponentene er uavhengige og normalfordelte. Standard utledning gir

$$(2.7) \quad P_1 = \Phi\{\beta'(R(z_1, x) - R(z_2, x))/\tau\}$$

hvor

$$\tau^2 = \mathrm{Var}\{e(z_1, x) - e(z_2, x)\} = 1 + \sum_r \sigma_r^2\{R_r(z_1, x) - R_r(z_2, x)\}^2$$

For $\tau = 3$ har valgsannsyligheten en mer komplisert form (jfr. avsnitt 4.2).

Hausman and Wise (1978) har benyttet denne trinære probitmodellen til å analysere valg av reisemåte i Washington D.C. De har også spesifisert probitmodellen for fire alternativer og har ved modifisering av beregningsalgoritmen redusert maskintiden med en faktor på ca. 100. I den trinære modellen er alternativene 1) privatbil alene, 2) privatbil i grupper og 3) kollektivtransport. Tabellen nedenfor viser de estimerte sannsynlighetene ved henholdsvis den heterogene probitmodellen og logitmodellen.

Estimerte valgsannsynligheter

	Alternativ 1	Alternativ 2	Alternativ 3	χ^2
Stokastisk koeffisient probit	0.346	0.197	0.457	0.28
Logit	0.363	0.218	0.414	1.73
Sampel	0.340	0.180	0.480	

Her ser vi at modellen som tillater heterogenitet ikke avviker fra de empiriske estimatene med mer enn 0.02 og den har χ^2-observator som er betydelig lavere enn for logitmodellen.

Antall stokastiske koeffisienter i anvendelsen ovenfor er fra tre til fem, dvs. det er fra 6 til 10 parametre som estimeres, nemlig forventinger og varianser til koeffisientene.

Hausmann og Wise antyder kostnader mellom \$ 7.50 - \$ 10.00 sammenliknet \$ 5.00 for logitmodellen. Når antall alternativer overstiger fem er probitmodellen med stokastiske koeffisienter for komplisert til at dagens beregningsalgoritmer kan brukes siden en da må foreta numeriske integrasjoner av fem-tupple integraler.

2.5. Aggregering

La D_1 være forventet etterspørsel etter alternativ 1. Er n_j antall personer i celle j, (dvs. antall personer med j-te kjennetegn-kombinasjon kan D_1 beregnes ved

$$D_1 = \sum_j N_j p_{1j}$$

hvor P_{1j} er valgsannsynligheten for alternativ 1 i j-te celle. I det binære tilfelle hvor (2.7) gjelder kan en finne en enkel formel for D_1 under antagelsen at $R(z_1, x) - R(z_2, x)$ er multinormalt fordelt med forventing μ og kovariansmatrise Ω.

En enkel utledning som vi sløyfer her gir

$$D_1 = N\Phi(\beta'\mu/\sqrt{1+\tau^2})$$

hvor $\tau^2 = \beta'\Omega\beta$ og N er populasjonsstørrelsen.

Anta nå at vi har diskrete forklaringsvariable som definerer celler og at vi ønsker å studere effekten av endringer i forklaringsvariablene på forventet etterspørsel. Vi har at endringen i etterspørselsgruppe i med hensyn på endring i komponenten

$v_{ji}^r = R_r(z_j, x^i)$ for j=1 når logitmodellen benyttes, er gitt ved

$$\frac{\partial(N_i p_{1i})}{\partial v_{1i}^r} = \beta_r N_i p_{1i}(1-p_{1i}).$$

Tilsvarende er endringen m.h.p. v_{2i}^r gitt ved

$$\frac{\partial N_i p_{1i}}{\partial v_{2i}^r} = -\beta_r N_i p_{1i}(1-p_{1i}).$$

Følgelig blir celle-elastisiteten for alternativ 1 m.h.p. variablene v_{1i}^r og v_{2i}^r henholdsvis

$$E_{1i}(1,r) = \frac{v_{1i}^r}{N_i p_{1i}} \frac{\partial(N_i p_{1i})}{\partial v_{1i}^r} = \beta_r v_{1i}^r (1-p_{1i}) \tag{2.8}$$

og

$$E_{1i}(2,r) = -\beta_r v_{2i}^r (1-p_{1i}). \tag{2.9}$$

Vi kan nå uttrykke den totale etterspørselselastisitet ved disse celleelastisitetene. La $\bar{v}^r_{1i}$ være initialverdien av variabelkomponenten v^r_{1i}. Forutsetter vi en fast endring for variabelkomponentene betyr det at vi kan skrive $v^r_{1i} = t\bar{v}^r_{1i}$ for alle i hvor t er en skalar. Etterspørselselastisiteten for alternativ 1 m.h.p. en slik uniform endring er dermed gitt ved

$$E_1(j,r) = \frac{t}{D_1}\frac{\partial D_1}{\partial t}\bigg|_{t=1} = \left[\frac{t}{D_1}\sum_i \frac{\partial(N_i p_{1i})}{\partial(\bar{v}^r_{1i}t)}\frac{\partial(\bar{v}^r_{1i}t)}{\partial t}\right]\Bigg|_{t=1}$$

$$= \sum_i \frac{N_i p_{1i}}{D_1}\frac{\partial(N_i p_{1i})}{\partial(\bar{v}^r_{1i}t)}\bigg|_{t=1}\frac{\bar{v}^r_{1i}}{N_i P_{1i}} = \frac{1}{D_1}\sum_i N_i p_{1i}(j,r)\, E_{1i}(j,r).$$

Dette gir

$$(2.10)\quad E_1(1,r) = \frac{\beta_r}{D_1}\sum_i N_i p_{1i}(1-p_{1i})v^r_{1i}$$

og

$$(2.11)\quad E_1(2,r) = -\frac{\beta_r}{D_1}\sum_i N_i p_{1i}(1-p_{1i})v^r_{2i}.$$

Analoge formler får en dersom probitmodellen gjelder og $R(z_j,x)$ antas normalfordelt.

2.6. Heterogenitet når populasjonen observeres ved flere tidspunkt

Vi skal nå tenke oss at vi har observasjoner på flere tidspunkter for hvert individ. Vi tenker oss videre at ved hvert tidspunkt står individet overfor et valg mellom alternativer og det velger det alternativet som maksimeres nytten ved tidspunkt t

$$U_t(z_j(t),\, x(t)\,) = \alpha'(t)R(z_j(t),\, x(t)\,) + \varepsilon(z_j(t),\, x(t)\,).$$

Hvis individet har valgt alternativ j ved tidspunkt t sier vi at individet er i j-te tilstand ved tidspunktet. Dersom nå restleddene er uavhengige ved de ulike tidspunktene kan nyttefunksjonen maksimeres analogt til teorien foran. Imidlertid vil det ofte være grunn til å anta at en har autokorrelasjon i restleddene for hvert individ som skyldes permanente uobserverbare karakteristika for individet og for alternativene. For et gitt individ i antar vi at smaksparametrene og restleddet $\varepsilon(z,x)$ varierer over tid og kan dekomponeres i permanente og tilfeldige komponenter dvs.

$$\alpha_{ri}(t) = \alpha_{ri} + \eta_{ri}(t), \quad \varepsilon(z_j(t),\ x^i(t)\ ) = \varepsilon_{ij}(t)$$

hvor $\{\eta_{ri}(t)\}$ og $\{\varepsilon_{ij}(t)\}$ er prosesser som har forventning null, er uavhengige og har ingen autokorrelasjon. α_{ri} og $\varepsilon_{ij}(t)$ varierer over populasjonen, er uavhengige og har forventninger henholdsvis β_r og null. Følgelig kan vi uttrykke nyttefunksjonen ved

$$U_t(z_j(t),\ x^i(t)\ ) = \alpha_i'R(z_j(t),\ x^i(t)\ ) + \eta_i(t)'R(z_j(t),\ x^i(t)\ ) + \varepsilon_{ij}(t)$$

La

$$w_{ij}(t) = \eta_i(t)'R(z_j(t),\ x^i(t)\ ) + \varepsilon_{ij}(t)$$

Sannsynligheten for at i-te individ skal velge status j ved tidspunkt t blir

$$p_{ij}(\alpha_i,t) = p_j(\alpha_i,z(t),\ x^i(t)\ ) = \Pr\{\ w_{ij}(t) - w_{ik}(t) \geq \alpha_i' \left[R(z_k(t),x^i(t)) - R(z_j(t),\ x^i(t)\ )\right],\ k = 1,\ 2,\ \ldots.\} \tag{2.12}$$

Legg merke til at restleddene $w_{ij}(t)$ ikke er uavhengige. Vi har nemlig

$$\mathrm{Cov}\{w_{ij}(t),\ w_{ik}(t)\} = \sum_r \tau_{\eta r}^2 R_r(z_j(t),\ x^i(t)\ )R_r(z_k(t),\ x^i(t)\ ).$$

Vi antar her at $x^i(t)$ kan inneholde opplysninger om alle tidligere valg slik at $p_j(t)$ f.eks. kan avhenge av individets valg ved tidspunkt t-1. La oss studere denne situasjonen nærmere. La $Y_{ikj}(t)$ være en binær variabel som er lik 1 dersom i-te individ velger k ved tidspunkt t-1 og j ved tidspunkt t. La videre $p_{ikj}(\alpha_i,t)$ være den tilhørende "overgangssannsynligheten". Sannsynligheten for at dette individet skal ha "valghistorien"

$$Y_i = (Y_{ikj}(t),\ k=1,2,..\ j=1,2.,,,\ t=1,2....)$$

er lik

$$\Pr\{Y_i = y_i | Y_i(0), \alpha_i\} = \prod_t \prod_{k,j} p_{ikj}(\alpha_i,t)^{y_{ikj}(t)} .$$

For å få sannsynligheten for denne valghistorien for det representative individ, dvs. et tilfeldig uttrukket individ, må vi ta forventningen m.h.p. α. Altså

$$\Pr\{Y = y | Y(0)\} = E\{\prod_t \prod_{k,j} p_{kj}(\alpha,t)^{y_{kj}(t)}\} \tag{2.13}$$

Uttrykkene

$$E\{\prod_t \prod_{k,j} p_{kj}(\alpha,t)^{y_{kj}(t)}\} \text{ og } \prod_t \prod_{k,j} \{Ep_{kj}(\alpha,t)\}^{y_{kj}(t)}$$

kan avvike vesentlig fra hverandre. Det siste uttrykket representerer valghistorien under forutsetning om at populasjonen er homogen, dvs. at det ikke er noen permanente smakskomponenter. Vi skal i et senere kapittel diskutere denne forskjellen mer inngående.

Uttrykkene ovenfor blir svært kompliserte under forutsetning om lineær nyttefunksjon.

Vi foreslår derfor en loglineær nyttefunksjon som viser seg å gi håndterlige uttrykk. Vi antar nå at $\alpha_{ri}(t) = \alpha_{ri}$, dvs. smaksparametrene varierer bare over populasjonen og er konstante over tid. Videre antar vi at forventningen til nyttefunksjonen har loglineær form;

$$V(z_j,x) = \log\{\alpha' R(z_j,x)\}/\sigma_\varepsilon \tag{2.14}$$

hvor nå $\alpha_r > 0$ og $R_k(z_j, x)$ antas å være positive.

R_k kan her avhenge av ukjente parametre som ikke er stokastiske. Vi antar videre at smakskomponentene α_r er gammafordelte med parametre q_r og λ_r, dvs. tettheten for α_r er gitt ved

$$\lambda_r^{q_r} \alpha^{q_r - 1} e^{-\lambda_r \alpha} / \Gamma(q_r) .$$

Følgelig har vi sammenhengen

$$\beta_r = q_r/\lambda_r \quad \text{og} \quad \sigma_r^2 = \beta_r/\lambda_r .$$

Modellantagelsen ovenfor leder til operasjonaliserbare formler. Under forutsetningene som leder til (2.6) får vi

$$(2.15)\quad p_{kj}(\alpha) = \frac{\exp\{\sigma_\varepsilon V(z_j,x^k)\}}{\sum\limits_j \exp\{\sigma_\varepsilon V(z_j,x^k\}} = \frac{\alpha' R(z_j,x^k)}{\sum\limits_j \alpha' R(z_j,x^k)}$$

hvor vi for enkelthets skyld har sløyfet tidsindeksen. Dette gir valgsannsynligheten for det representative individ gitt valget ved forrige tidspunkt ved

$$(2.16)\quad p_{kj} = Ep_{kj}(\alpha) = \sum_s \beta_s R_s(z_j,x^k) I_s(q_1, \ldots; T(z,x^k))$$

hvor $T = (T_1, T_2, \ldots)$, $T_j(z,x) = \sum\limits_k R_j(z_k,x)$ og I er et integral som er gitt i 4.3.

Vi vil kalle denne modellen loglit-modellen.

Høyere ordens momenter kan også beregnes eksplisitt. Fra avsnitt 4 har vi at

$$(2.17)\quad E\{p_{\ell j}(\alpha,t) p_{k\ell}(\alpha,t-1)\} = \sum_s \left[A_s \beta_s I_s(q_1, \ldots; T(t)) \ldots + B_s \beta_s I_s(q_1, \ldots; T(t-1)\right]$$

hvor A og B er vektorer som bestemmes ved sammenhengen

$$(2.18)\quad A_r T_s(t-1) + A_s T_r(t-1) + B_r T_s(t) + B_s T_r(t)$$
$$= R_r(z_j(t), x^\ell(t)) R_s(z\,(t-1), x^k(t-1)) + R_s(z_j(t), x^\ell(t))$$
$$\cdot R_r(z_\ell(t-1), x^k(t-1)).$$

Formlene ovenfor gjelder når $T(t) \neq T(T-1)$. Dersom $T(t)=T(t-1)$ har vi

$$(2.19)\quad E\{p_{k\ell}(\alpha)\; p_{\ell j}(\alpha)\} = \sum_s R_s(z_j,x) R_s(z\;,x) \beta_s \frac{(q_s+1)}{\lambda_s}$$
$$\cdot I_s(q_1, \ldots, q_s+1, \ldots; T(z,x))$$
$$+ \sum_{r \neq s} R_r(z_j,x) R_s(z_\ell,x) \beta_r \beta_s I_s(q_1, \ldots, q_r+1, \ldots; T(z,x)).$$

Ved å anvende disse formlene kan høyere ordens momenter beregnes rekursivt.

2.7. Prediksjon på grunnlag av utvalgsdata når populasjonen er heterogen

Vi antar her at bare et utvalg av populasjonen observeres ved de ulike tidspunktene. Dette er situasjonen i Byråets arbeidskraftundersøkelser hvor utvalgene fornyes delvis ved hvert kvartal. La $W_{ik}(t)$ være en binær variabel som er lik 1 dersom det i-te individ velger k ved tidspunkt t og null ellers. Vi er interessert i å predikere

$$W_{.k}(t+\ell) = \sum_{i\varepsilon M_t} W_{ik}(t+\ell) \qquad \ell \geq 0$$

hvor M_t er hele populasjonen (eller en del-populasjon) på grunnlag av observasjonene fra utvalgene ved de respektive tidspunktene. Betrakt populasjonen M_{t+1}. Den består av de personene som ikke har vært med i noe utvalg ved noe tidspunkt, de som har vært med i utvalget ved tidspunkt t, de som har vært med i utvalget ved tidspunkt t-1 og ikke ved tidspunkt t osv.

La $S_{t,j}$ betegne den delen av utvalgene som observeres ved tidspunkt t-j og ikke observeres ved tidspunktene t-j+1, .., t. og sett $S_t = \underset{j}{\cup} S_{t,j}$. S_t består altså av alle personene som er observert minst én gang i tidsrommet. Vi har for ℓ=1

$$W_{.k}(t+1) = \sum_{i \notin S_t} W_{ik}(t+1) + \sum_j \sum_{i\varepsilon S_{t,j}} W_{ik}(t+1).$$

La $W(S_{t,j}) = \{W_{ik}(t-j),\ k=1,2,\ ..,i\varepsilon S_{t,j}\}$

og la $P_i(\alpha,t)$ være overgangsmatrisen $\{p_{isk}(\alpha,t)\}$. La videre $Q_i(\alpha,t,j) = \{q_{isk}(\alpha,t,j)\}$ være matrisen definert ved

$$Q_i(\alpha,t,j) = \prod_{p=0}^{j-1} P_i(\alpha,t-p)$$

Vi har nå umiddelbart at

$$E\{W_{ik}(t+1)\,|\,W_{is}(t-j) = 1\} = Eq_{isk}(\alpha,t+1,j)$$

hvilket medfører at

$$E\{W_{ik}(t+1)\,|\,W_{is}(t-j),\ s=1,2,..\} = \sum_s W_{is}(t-j)Eq_{isk}(\alpha,t+1,j)$$

Dette gir prediktoren

$$(2.20)\quad \hat{W}_{sk}(t,1) = E\{W_{\cdot k}(t+1)|W(S_{t,j}),\ W_{ik}(0),\ i,k,j\}$$

$$= \sum_{j=0}^{t} \sum_{i\varepsilon S_{t-j}} \sum_{s} W_{is}(t-j)E\ q_{isk}(\alpha,t+1,\ j)$$

med prediksjonsvarians

$$(2.21)\quad \mathrm{Var}\{W_{\circ k}(t+1)|W(S_{t,j}),\ W_{ik}(0),\ i,k,j\} = \sum_{j=0}^{t} \sum_{i\varepsilon S_{t-j}} \sum_{s} W_{is}(t-j)E[q_{isk}(\alpha,t+1,j)$$

$$- q_{isk}(\alpha,t+1,\ j)^2].$$

2.8. Prediksjon på grunnlag av utvalgsdata når populasjonen er homogen med tidsavhengige stokastiske overgangssannsynligheter

Vi skal studere konsekvensen av en annen modellformulering enn i avsnitt 2.5. Vi antar nå at overgangssannsynlighetene $p_{kj}(t)$ er like for alle individene for et gitt tidspunkt. Istedet antar vi at $p_{kj}(t)$ varierer over tid. Følgelig blir $\{p_{kj}(t)\}_t$ en stokastisk prosess. For hvert tidspunkt t forutsetter vi at overgangssannsynligheten er multivariant betafordelt gitt observasjonene fra tidligere utvalg. Den multivariate betafordeling eller Dirichlet-fordelingen har sannsynlighetstetthet

$$f_t(p_1,p_2,\ldots,p_5) = \frac{\Gamma(a)p_1^{a_1-1}\ p_2^{a_2-1}\ldots p_5^{a_5-1}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\ \ldots\ldots\Gamma(a_5)}$$

hvor $\Sigma p_j = 1$, $a_j > 1$ er parametre og $a = \Sigma a_j$.

(Se Mosiman (1962.))

For hver k antar vi altså at $p_{kj}(t)$, j=1, 2,.. er multivariat betafordelt med parametre $\{a_{kj}(t)\}$ hvor $a_{k.} = \sum_j a_{kj}(t)$ forutsettes uavhengig av t.

Videre antar vi at $p_{kj}(t)$ følger en førsteordens autoregressiv prosess

$$p_{kj}(t+1) - \mu_{kj} = \lambda(p_{kj}(t) - \mu_{kj}) + \varepsilon_{kj}(t+1)$$

hvor $\{\varepsilon_{kj}(t)\}$ er uavhengige for ulike k og j og ukorrelerte. Videre er $\varepsilon_{kj}(t+1)$ uavhengig av $p_{kj}(t)$. Denne modellen er valgt av illustrasjonshensyn og framgangsmåten er analog for mer generelle autoregressive modeller. Vi definerer

$$a_{kj}(t+1)/a_{k.} = E\{p_{kj}(t+1)|W_k(S_{t,i}),\forall i\},$$

Betafordelingen har den egenskapen at

$$E\{p_{kj}(t)|W_k(S_{t,i}),\forall i\} = \frac{a_{kj}(t) + Y_{kj}(t)}{a_{k.} + Y_{k.}(t)} .$$

Kombinerer vi dette med modellen for $p_{kj}(t)$ får vi

$$a_{kj}(t+1)/a_{k.} - \mu_{kj} = \phi_k(t)(a_{kj}(t)/a_{k.} - \mu_{kj}) + \psi_k(t)(\hat{p}_{kj}(t) - \mu_{kj})$$

hvor

$$\phi_k(t) = \lambda a_{k.}/(a_{k.} + Y_{k.}(t)),$$

$$\psi_k(t) = \lambda Y_{k.}(t)/(a_{k.} + Y_{k.}(t))$$

og

$$\hat{p}_{kj}(t) = Y_{kj}(t)/Y_{k.}(t).$$

Herav får vi at

$$a_{kj}(t+1)/a_{k.} - \mu_{kj} = \psi_k(t) \sum_{r=0}^{t} \gamma_k(r,t)(\hat{p}_{kj}(t-r) - \mu_{kj})$$

hvor

$$\gamma_k(r,t) = \prod_{i=0}^{r} \phi_k(t-i).$$

Når $p_{kj}(t)$, j=1,2,... er gitte er observasjonene Y_{kj} ($(Y_{k.}(t)$ gitt) multinomisk fordelte. For å få den ubetingede fordeling for observasjonene må vi følgelig multiplisere med fordelingen til $\{p_{kj}(t)\}$ og integrere over $p_{kj}(t)$, j=1,2,... Dette gir den multivariate negative hypergeometriske fordelingen (se Mosiman) som benyttes til å finne likelihoodfunksjonene.

Det følger av antagelsene våre at $p_{kj}(t+i)$ og $p_{rs}(t)$ er uavhengige for $k\neq r$ og for alle i og s. For $k\neq r$ har vi

$$E\{p_{kk}(t+1)p_{ks}(t)\} = \lambda E\{(p_{kk}(t) - \mu_{kk})\ p_{ks}(t)\} + \mu_{kk}\mu_{ks}$$

$$= \lambda \mathrm{cov}\{p_{kk}(t),\ p_{ks}(t)\} + \mu_{kk}\mu_{ks}\ .$$

Tilsvarende kan vi beregne høyere ordens momenter og momentene gitt observasjonene.

Prediktor og prediksjonsvarians beregnes nå på samme måte som foran ved å benytte (2.20) og (2.21).

3. ARBEIDSKRAFTANALYSER

3.1. Formål

Arbeidet med å lage en modell for arbeidskrafttilgangen er delt i to prosjekter; "Arbeidskraftprognosemodeller" og "Arbeidskraftanalyser". I det første prosjektet er hovedvekten lagt på å videreutvikle opplegget for framskriving av yrkesbefolkningen mens en i det andre prosjektet har konsentrert seg om å finne forklaringsfaktorer for gifte kvinners yrkesdeltaking. Siden prognosemetoden avhenger av forklaringsmodellen er det følgelig av vesentlig betydning å forbedre forklaringsmodellen.

I det arbeidet som er gjort (Ljones (1977)) og som videreføres (Fridstrøm (1978)) studeres sammenhengen mellom binærvariabelen "sysselsatt" "ikke sysselsatt" i forhold til individkjennetegnene: kjønn, alder, antall barn under 16 år og alder på yngste barn, utdanning, ektefelles utdanning og yrke, og en indeks som karakteriserer arbeidsmarkedet på bostedet. (Vi kaller den siste variabelen for individvariabel fordi den er knyttet til individets bosted.)

Fridstrøm tenker seg også en trinær modell med status "sysselsatt", "delvis sysselsatt", "ikke sysselsatt" og med et mål for tilgangen på daghjemsplasser i kommunen som ytterligere forklaringsvariabel.

Hittil har en bare benyttet tversnittsdata for et tidspunkt (eventuelt for en tidsperiode) med samme parametre for alle individer. Et viktig spørsmål er om disse koeffisientene viser stabilitet over tid. En bør derfor ta sikte på å estimere og teste modellspesifikasjoner ved å utnytte observasjoner for individene ved flere tidspunkter dersom slike data er tilgjengelige. Slike data har vi som kjent i AKU. Vår hypotese er at populasjonen er heterogen med parametre som varierer over populasjonen men som er konstante over tid for hvert individ.

En begrunnelse for individspesifikke parametre er at mange av de eksogene personkjennetegnene er latente variable som vi måler med indikatorer. La x være en slik vektor av latente kjennetegn og la w være den variabelvektor vi måler. w kan f.eks. være et sett av dummy-variable som er oppstått ved dikotomisering av kontinuerlige variable eller x-w kan være andre typer målefeil. Anta at den egentlige modellen for nyttefunksjonen for i-te individ relativt til j-te alternativ er

$$U_{ij} = \sum_r \beta_{jr} x_r^i + \varepsilon_{ij}$$

hvor β_{jr} er faste koeffisienter. Men dette er ekvivalent med

$$U_{ij} = \sum_r (\beta_{jr} x_r^i / w_r^i) w_r^i + \varepsilon_{ij} = \sum_r \alpha_{jr}^i w_r^i + \varepsilon_{ij}$$

hvor $\alpha_{jr}^i = \beta_{jr} x_r^i / w_r^i$.

Altså blir koeffisientene i den observerbare modellen <u>individspesifikke</u> dvs. de varierer over populasjonen i følge en eller annen fordeling.

I en homogen populasjon vil en modell for individuell adferd medføre samme modell for gjennomsnittlig adferd for en gruppe med observerbare like kjennetegn. I den heterogene situasjonen er dette ikke tilfelle og det kan være vesentlig å skille mellom individmodellen og "makro"-modellen.

Vi skal i det følgende avsnittet skissere en modell for sysselsetting basert på teorien i avsnitt 2.4.

3.2. Heterogene modeller for sekvensiell yrkesdeltaking

I en analyse av yrkesmobilitet fant Blumen, Kogan og McCarthy (BKM) (1955) blant annet at individer som hadde skiftet yrke ofte hadde stor sannsynlighet for å skifte yrke i framtida. Deres forklaring var at populasjonen var heterogen i den forstand at en ukjent andel er "stayers" og resten er "movers". Ben Porath (1973) illustrerer dette med følgende eksempel: Anta at en gruppe (observerbare like) individer har en gjennomsnittlig årlig sysselsettingsrate på 50 %. To ekstreme tolkninger er:

(i) Gruppen er homogen og hver person har 50 % sannsynlighet for å være sysselsatt.

(ii) Gruppen er heterogen og halvparten av alle individene i gruppen er alltid sysselsatte mens de resterende aldri er sysselsatte.

I tilfelle (i) vil hver person forventes å være sysselsatt halvparten av tiden personen tilbringer i gruppen mens i tilfelle (ii) er det ingen overgang mellom sysselsatt og ikke sysselsatt.

BKM's metode var først å estimere en Markovkjedemodell med faste overgangssannsynligheter $P = \{p_{ij}\}$ De estimerte p_{ij} ved de observerte overganger for to påfølgende tidspunkt. Deretter testet de modellen ved å sammenlikne den estimerte overgangsmatrisen $\hat{P}(o,k)$ for overgangssannsynligheten fra tidspunkt t til t+k med $\hat{P}^k$ hvor $\hat{P}$ er estimatet for P. Dersom modellantagelsen er riktig er jo $P^k = P(o,k)$ for alle k. BKM fant imidlertid at

$$\hat{p}_{ii}(o,k) > \hat{p}_{ii}^{(k)}$$

dvs. at diagonalelementene i den observerte k-te trinns overgangsmatrisen er større enn diagonalelementene i den predikerte k-te trinns overgangsmatrisen. ($\hat{p}_{ij}^{(k)}$ er (i,j) elementet i $\hat{P}^k$). De fant videre at størrelsen på ulikheten økte med økende k. (Jfr. Singer og Spilermann (1977).) Deres forklaring på dette var at populasjonen var heterogen slik at en ikke observerbar andel f_i i tilstand i (yrkeskategori i) er "stayers" og $1-f_i$ er "movers" med overgangssannsynligheter $\{p_{ij}\}$. Lar vi Z(k) være individets tilstand ved tidspunkt t+k har vi

$$\Pr\{Z(k) = j|Z(o)=i\} = \begin{cases} (1-f_i)p_{ij}^{(k)} & \text{for } i \neq j \\ f_i+(1-f_i)p_{ii}^{(k)} & \text{for } i=j \end{cases}$$

I matrise-notasjon kan dette skrives

$$P(o,k) = fI + (I-f)P^k$$

hvor f er en diagonalmatrise med $\{f_i\}$ som elementer. Denne modellen er blitt kalt "mover-stayer" modellen og BKM fant at den ga en bedre beskrivelse av yrkesmobilitet enn den opprinnelige Markovmodellen.

Angrepsmåten ovenfor har følgelig motivert forsøk på generaliseringer av "mover-stayer" modellen.

Heckmann og Willis (1977) antar at gifte kvinners yrkesdeltakingssannsynlighet er konstant for hver kvinne men fordeler seg over populasjonen i følge en betafordeling hvor parametrene er loglineære funksjoner av personkjennetegnene. Følgelig kaller de sin modell for betalogistisk. Svakheten med denne modellen er at de eksogene variable ikke tillates å variere over tid. Videre er sannsynligheten for overgang til ny sysselsettingsrater uavhengig av den aktuelle status og dette er opplagt urealistisk.

Sysselsettingsstatus ved det aktuelle tidspunkt kan være viktig å ta med siden det kan tenkes at den aktivitet og kostnad som er knyttet til skifte av sysselsettingsstatus medfører en viss treghet mot å endre status.

Vi skal her istedet basere oss på modelltypen som ble beskrevet i avsnitt 2.4.

I konvensjonell arbeidsmarkedsteori er valget mellom status sysselsatt eller ikke sysselsatt avhengig av forskjellen mellom marginal nytte og marginal kostnad. Marginal nytte måles gjerne ved personers forventede markedslønn U_1 og marginal kostnad måles gjerne ved personers "skyggepris" U_2 beregnet for null timer arbeidstid. Individet vil velge sysselsetting når $U_1 > U_2$. Nå kan verken U_1 eller U_2 observeres for alle personer. U_2 kan ikke observeres for noen og U_1 kan ikke observeres for de som ikke er sysselsatt.

Heckman (1974) viser at en likevel kan estimere funksjoner som bestemmer U_j, j=1,2. Vi skal imidlertid ikke gå inn på hans opplegg her. Forventet markedslønn tenkes å avhenge av variable som måler utdanning, og lokale arbeidsmarkedsbetingelser osv. Skyggeprisen er knyttet til variable som formue, ektefellens inntekt, priser, renter, forventet fremtidige lønninger, barnetall, osv.

Vi tenker oss her at vi har tre tilstander, nemlig "sysselsatt", "delvis sysselsatt" og "ikke sysselsatt" som vi benevner status 1, 2 og 3. Nyttefunksjonen $U_j(t)$ er knyttet til valg av status j ved tidspunkt t. I overenstemmelse med avsnitt 2.4 antas nyttefunksjonen loglineær dvs.

$$U_j(t) = \log\{\sum_k \alpha_k c_{kj} x_k(t)\} + \varepsilon_j(t)$$

hvor c_{kj} er konstanter som skal estimeres, $x_k(t)$ er det k-te personkjennetegn som ble beskrevet innledningsvis og α_k er smaksparametre som varierer over populasjon i følge gammafordelinger. Vi får dermed loglitmodellen gitt ved (2.13) og (2.14) med $R_k(z_j,x) = c_{kj}x_k$.

De individvariablene som inngår er enten dummyvariable (kjønn, alder på yngste barn, utdanning, ektefelles utdanning og yrke) eller kontinuerlige variable (alder, daghjemsdekning og næringslivsindeks). I det nåværende opplegget er alder beskrevet ved et sett av dummyvariable men det kan være aktuelt å la alder inngå som kontinuerlig variabel. I så fall er den lineære funksjonsformen

$$R_k(z_j, x) = c_{kj} x_k$$

hvor x_k er alder, for enkel. Det kan også være tvilsomt om et annengradspolynom er en god funksjonsform. Funksjonen bør antakelig være flatere i intervallet 25-50 år og synke svært raskt i intervallet 65-74 år. Et alternativ til polynomfunksjonen er splinefunksjoner (jfr. Lenth 1977). Eksempelvis kan vi la delepunktene (nodene) være $t_1=16$, $t_2=25$, $t_3=65$ og $t_4 = 74$ år.

Estimering av modellen kan nå utføres ved å anvende sannsynlighetsmaksimeringsprinsippet. Dette leder til ikkelineære likninger som er gitt i appendikset og som følgelig må løses ved iterasjon, f.eks. ved hjelp av Newton-Raphson's metode. Modellformuleringen ovenfor er ikke begrenset til tre alternativer, man kan i motsetning til probitmodellen benyttes på et vilkårlig antall alternativer uten at estimeringen kompliseres vesentlig.

I dette opplegget er tidsenheten ett år. Dermed unngår vi komplikasjoner som skyldes sesongvariasjon. Videre vil hver person bare være med i utvalget ved to tidspunkter slik at en ikke trenger å beregne høyere ordens momenter enn

$$E\{p_{ki}(\alpha, t-1) p_{ij}(\alpha, t)\}$$

i uttrykket for likelihoodene. I overenstemmelse med avsnitt (2.6) lar vi $S_t = S_{t,1}$ være den delen av utvalget som er felles ved tidspunktene t og t-1. Herav får vi at likelihoodene for individene som er med i $S = \cup S_t$ kan skrives

$$L = \prod_{i \in S} \Pr\{Y_i = y_i \mid Y_i(0)\} = \prod_t \prod_{k,\ell,j} \prod_{i \in S_t} E\{p_{ik\ell}(\alpha, t-1)^{y_{ik\ell}(t-1)} p_{i\ell j}(\alpha, t)^{y_{i\ell j}(t)}\}$$

Nå er

$$E\{p_{ik\ell}(\alpha,\ t-1)^{y_{ik\ell}(t-1)}\ p_{i\ell j}(\alpha,t)^{y_{i\ell j}(t)}\} = (1-y_{ik\ell}(t-1))(1-y_{i\ell j}(t)) +$$

$$(1-y_{ik\ell}(t-1))y_{i\ell j}(t)Ep_{i\ell j}(\alpha,t) + (1-y_{i\ell j}(t))\ y_{ik\ell}(t-1)Ep_{ik\ell}(\alpha,t-1) +$$

$$y_{ik\ell}(t-1)y_{i\ell j}(t)\cdot E\{p_{i\ell j}(\alpha,t)p_{ik\ell}(\alpha,t-1)\}$$

som benyttes ved estimeringen sammen med (2.17), (2.18) og eventuelt (2.19).

4. ESTIMERING

4.1. Faste smaksparametre

Vi skal gi en kort oversikt over aktuelle estimeringsmetoder for modellene overfor.

Dersom de eksogene variable z_j og x er diskrete kan utvalget grupperes i celler hvor personene har like observerbare kjennetegn. Dersom vi har den multinomiske modellen (2.6) kan estimering skje ved å anvende Berkson's (1953) metode eller ved å benytte sannsynlighetsmaksimeringsprinsippet som ECTA-programmet er basert på. I situasjoner hvor antall ovservasjoner pr. celle er lite (McFadden (1973) benytter tommelfingerregelen at minimum antall observasjoner skal være større eller lik 5) kan hverken Berkson's metode eller ECTA benyttes da disse metodene er basert på at data kan grupperes. I Byrået er det imidlertid nettopp implementert et program som estimerer logitmodeller med kontinuerlige forklaringsvariable. Siden vi i dette notatet har behandlet modeller hvor smaksparametrene er stokastiske skal vi ikke gå mer i detalj når det gjelder estimering av logitmodellen og andre modeller hvor parametrene er faste. Interesserte lesere henvises til Mc Fadden (1973), (1975), (1977) og Berkson (1953), (1944) og (1955).

4.2. Probitmodellen med stokastiske smaksparametre

Probitmodellen er basert på antagelsen at nyttefunksjonen $U(z_j,x), j=1, 2, .., J$ er multinormalt fordelt. Dersom J=2 er valgsannsynligheten for det representative individ gitt ved (2.7). For $J > 3$ er valgsannsynligheten gitt ved likning (26) i McFadden (1977). Denne formelen er også gitt av McFadden (1975)og av Hausmann og Wise (1978). For $J > 5$ er uttrykket for valgsannsynligheten for komplisert til at eksisterende iterasjonsprosedyrer er brukbare i praksis. For $J = 3$ gir Hausmann og Wise likningssettet som følger av sannsynlighetsmaksimeringsprinsippet og de har forbedret iterasjonsprosedyren slik at maskintiden reduseres med en faktor på ca. 100.

4.3. Loglit-modellen med stokastiske smaksparametre

Denne modellen har (så vidt jeg vet) ikke vært behandlet i litteraturen. Vi skal derfor se i detalj på de formlene som inngår i estimeringen. For enkelhets skyld skriver vi i dette avsnittet R^j istedet for $R(z_j,x)$ eventuelt med tidsvariabel: $R^j(t)$. Videre setter vi $T_k = \sum_j R_k^j$ og $T = (T_1, T_2, \ldots)$. Sannsynligheten for at det representative individ skal velge første alternativ blir ifølge (2.15) samt forutsetningene om gammafordelte parametre

$$(4.1.) \qquad p_1 = Ep_1(x) = E\{\frac{\alpha' R^1}{\alpha' T}\} = \int_{R^K} \frac{\alpha' R^1}{\alpha\, T} \prod_r \frac{\lambda_r^{q_r} \alpha_r^{q_r - 1} e^{-\lambda_r \alpha_r} d\alpha_r}{\Gamma(q_r)} .$$

Integralet ovenfor er et K-tuppel integral men vi skal se at det enkelt kan transformeres til et endimensjonalt integral. Vi har nemlig at

$$\int_0^\infty \exp\{-u\alpha' T\}\, du = 1/\alpha' T.$$

Innsettes dette uttrykket får vi

$$\sum_s (\prod_r \lambda_r^{q_r}) \int_0^\infty \int_{R^K} \frac{\alpha_s R_s^1 \alpha_1^{q_1 - 1} \alpha_2^{q_2 - 1} \cdots e^{-\alpha_1(\lambda_1 + uT_1) - \alpha_2(\lambda_2 + uT_2) - \cdots}}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)\cdots} .$$

$$\cdot \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 \cdots du}{} ,$$

Vi ser nå at de K innerste integralene kan beregnes hver for seg. Vi har at

$$\int_0^\infty \alpha_r^{q_r-1} e^{-\alpha_r(\lambda_r + uT_r)} d\alpha_r = \Gamma(q_r)/(\lambda_r + uT_r)^{q_r}$$

hvilket medfører at

$$p_1 = \Sigma_s \beta_s R_s^1 \int_0^\infty (\lambda_s + uT_s)^{-1} \prod_r (\lambda_r + uT_r)^{-q_r} du$$

hvor $\beta_s = q_s/\lambda_s$. Betegner vi integralet ovenfor med $I_s(q_1, \ldots, q_K; T)$ blir altså

$$(4.2) \qquad p_1 = \sum_s \beta_s R_s^1 I_s(q_1, \ldots, q_K; T), \; q_r > 1.$$

Tilsvarende kan det vises at annen ordens moment er gitt ved

$$(4.3) \qquad E\{p_i(\alpha)p_j(\alpha)\} = \sum_s R_s^i R_s^j \beta_s((1+q_s)/\lambda_s) I_s(q_1, \ldots, q_s + 1, \ldots; T)$$

$$+ \sum_{r \neq s} R_s^i R_s^j \beta_r \beta_s I_s(q_1, \ldots; T).$$

Anta nå at z_j og x er tidsavhengige. Da blir R^j og T tidsavhengige og formlen ovenfor kan ikke benyttes til å beregne $E\{p_i(\alpha, t-1)p_j(\alpha, t)\}$. Nå har vi imidlertid at

$$\frac{\alpha' R^i(t-1)\alpha' R^j(t)}{\alpha' T(t-1)\,\alpha' T(t)} = \frac{\alpha' A^{ij}}{\alpha' T(t)} + \frac{\alpha' B^{ij}}{\alpha' T(t-1)}$$

hvor A^{ij} og B^{ij} er vektorer som bestemmes ved sammenhengen

$$\alpha' A^{ij} \alpha' T(t-1) + \alpha' B^{ij} \alpha' T(t) = \alpha' R^i(t-1)\alpha' R^j(t).$$

Denne likningen er ekvivalent med

$$R_r^i(t-1)R_s^j(t) + R_s^i(t-1)R_r^j(t) = A_r^{ij}T_s(t-1) + A_s^{ij}T_r(t-1)$$

$$+ B_r^{ij}T_s(t) + B_s^{ij}T_r(t).$$

Dermed kan vi benytte (4.1) og (4.2) på hvert av leddene ovenfor hvilket gir

$$(4.4) \quad E\{p_i(\alpha,t-1)p_j(\alpha,t)\} = \sum_s [A_s^{ij}\beta_s I_s(q_1, ..; T(t))$$

$$+ B_s^{ij}\beta_s I_s(q_1, ..; T(t-1))].$$

De partiellderiverte m.h.p. p_j og $E\{p_i(\alpha,t)p_j(\alpha, t-1)\}$ kan beregnes som følger.

Vi har at

$$\frac{\partial I_s}{\partial \lambda_r} = q_r I_s(q_1, ..., q_r+1, ..; T), \text{ når } s \neq r$$

$$\frac{\partial I_s}{\partial \lambda_s} = (q_s+1)\, I_s,$$

$$\frac{\partial I_s}{\partial q_r} = \int_0^\infty \log(\lambda_r + uT_r)(\lambda_s + uT_s)^{-1} \prod_k (\lambda_k + uT_k)^{-q_r}.$$

I arbeidskraftmodellen er $T_r = \sum_j c_{rj}x_j$ slik at

$$\frac{\partial p_j}{\partial c_{ri}} = -x_i E\{\frac{\alpha' R^j}{(\alpha' T)^2}\}$$

for $i \neq j$ og

$$\frac{\partial p_j}{\partial c_{rj}} = x_j E\{\frac{\alpha_r}{\alpha' T}\} - x_j E\{\frac{\alpha' R^j}{(\alpha' T)^2}\} \text{ for } i=j.$$

Tilsvarende som ovenfor kan det vises at

$$E\{\frac{\alpha' R^j}{(\alpha' T)^2}\} = \sum_s \beta_s R_s^j [I_s(q_1, \ldots, q_s - 1, \ldots; T) - \lambda_s I_s(q_1, \ldots; T)] / T_s$$

og $$E\{\frac{\alpha_r}{\alpha' T}\} = \beta_r I_r(q_1, \ldots; T).$$

De partiellderiverte av høyere ordens momenter kan beregnes tilsvarende.

4.4. Hypotesetesting

Ovenfor har vi beskrevet forskjellige mulige modellformuleringer for valgsannsynligheten i en multinær valgsituasjon. Problemet med å teste disse modellene mot hverandre er at ingen er spesialtilfeller av en av modellene, bortsett fra situasjoner hvor hypotesen er faste koeffisienter i en stokastisk koeffisient modell (f.eks. loglit-modeller).

Som testobservatorer er følgende alternativer aktuelle. La L (Θ) være likelihoodfunksjonen til observasjonene hvor Θ er parametervektoren. I situasjoner hvor j-te individ velger k-te alternativ med sannsynlighet $p_{ik}(\Theta)$ blir

$$L(\Theta) = C + \sum_{i,k} Y_{ik}\, p_{ik}(\Theta)$$

der C er en konstant og Y_{ik} er lik 1 dersom individet velger k-te alternativ og null ellers. I situasjoner hvor en har flere observasjoner pr. celle defineres

$$S(\Theta) = \sum_{i,k} N_i^2(\hat{p}_{ik} - p_{ik}(\Theta))^2/p_{ik}(\Theta)$$

hvor i nå betegner i-te celle, $\hat{p}_{ik} = Y_{ik}/N_i$ og N_i er antall observasjoner i i-te celle. Observatorene

$$\rho^2 = 1 - L(\hat{\Theta})/L(\bar{\Theta})$$

og

$$R^2 = 1 - S(\hat{\Theta})/S(\bar{\Theta})$$

hvor $\hat{\Theta}$ er parametervektoren under hypotesen og $\bar{\Theta}$ er parametervektoren a priori, er mål for "andelen av variansen som forklares." Dersom $\bar{\Theta}$ inneholder k_1 parametre og $\hat{\Theta}$ inneholder k_2 vil

$$k_2\rho^2/(k_2-k_1)(1-\rho^2)$$

i store utvalg være tilnærmet F-fordelt med k_2-k_1 og k_2 frihetsgrader.

Indeksen R^2 kan sammenliknes med den multiple korrelasjonskoeffisienten som benyttes i standard regresjonsanalyse. Indeksen har imidlertid ikke gode egenskaper for små utvalg og den er svært følsom ovenfor spesifikasjonsfeil ved sannsynligheter nær 0 eller 1. Slike spesifikasjonsfeil vil medføre at R^2 overestimeres.

En måte å vurdere modellene på er å se hvor godt de predikerer observert valg. Anta at valgsannsynligheten for i-te individ p_{ik} er kjent. Anta at dersom et individ velger alternativ k mens et annet alternativ er predikert vil det koste C_k. Prediksjonsregelen velges som følger: La δ_{ik} være lik 1 dersom k-te alternativ predikeres for i-te individ og null ellers. Total kostnad ved feilklassifisering blir

$$C = \sum_{i,k} Y_{ik} C_k (1 - \delta_{ik})$$

som har forventning

$$EC = \sum_{i,k} p_{ik} C_k (1-\delta_{ik}).$$

Minimering av EC leder til prediksjonsregelen; $\delta_{ik} = 1$ dersom

$$C_k p_{ik} \geqslant C_j p_{ij}.$$

McFadden et al. (1975) behandler kostfunksjonene $C_k = 1$, og $C_k = 1/\bar{p}_{.k}$ hvor $\bar{p}_{.k}$ er gjennomsnittssannsynligheten for å velge alternativ k. Dersom $C_k = 1$ er

$$\lambda_1 = 1 - C/D$$

et mål for tilpasningen, hvor D er antall celler. McFadden et al. innvender mot denne kostfunksjonen at de alternativer som har en lav gjennomsnittssannsynlighet vil bli predikert sjelden fordi antall feilklassifiseringer en får ved å predikere alternativer med lave sannsynligheter vil være lite. Følgelig vil en underestimere andelen av aggregerte valg av alternativer som har lav sannsynlighet. En kostfunksjon som korrigerer denne skjevheten er $C_k = 1/\bar{p}_{.k}$. Denne funksjonen medfører at prediksjonen av de aggregerte andelene vil konsentreres i nærheten av de observerte aggregerte andelene. Et mål for tilpasningen i dette tilfelle er

$$\lambda_2 = 1 - \frac{\sum_{i,k} Y_{ik}(1-\delta_{ik})/\bar{p}_{\cdot k}}{\sum_{i,k} Y_{ik}(1-1/J_i)/\bar{p}_{\cdot k}}$$

hvor J_i er antall alternativer som er tilgjengelig for i-te individ.

Referanser:

Ben-Porath, Y. (1973): Labour Force Participation Rates and the Supply of Labour. J. Pol. Econ. 81, 697 - 704.

Blumen, I., Kogan, M. and McCarthy, P.J. (1955): The Industrial Mobility of Labour as a Probability Process. Cornell Studies in Industriel and Labour Relations, Vol. 6, Ithaca, N.Y. Cornell Univ. Press.

Berkson, J. (1944): Application of the Logistic Function to Bio-assay. JASA, 39, 357 - 365.

Berkson, J. (1953): A statistically Precise and Relatively Simple Method of Estimating the Bioassay with Quantal Response, Based on the Logistic Function. JASA, 39, 565 -599.

Brunborg, H. (1978): An Econometric Model of Fertility Incorporating Sex and Contraception. (A Dissertation Proposal). Maskinskrevet manuskript, Statistisk Sentralbyrå.

Berkson, J. (1955): Maximum Likelihood and Minimum χ^2 Estimates of the Logistic Function. JASA, 50, 130 - 162.

Fridstrøm, L. (1978): Alternative statistiske modeller for yrkesdeltaking. Maskinskrevet notat (Sosiodemografsik forskningsgruppe, 20/2-78.)

Hausman, J. A., and Wise, D.A. (1978): A Conditional Probit Model for Qualitative Choice: Discrete Decisions Recognizing Interdependence and Heterogeneous Preferences. Econometrica, 46, 403 - 426.

Heckmann, J.I., (1974): Shadow prices, Market Wages and Labor Supply. Econometrica 42, 679 -694.

Heckmann, J.I. and Willis, J.R. (1977): A Beta-Logistic Model for the Analysis of Sequential Labour Force Participation by Married Women. J. Pol. Econ. 85, 27 - 58.

Hernæs, E. (1978): Valghandlingsteoretisk analyse av utdanningsadferd. Maskinskrevet manuskript (EHe/SOw, 8/5-78), Statistisk Sentralbyrå.

Lenth, R.V. (1977): Robust Splines. Commun. Statist. 9, 847 - 854.

Ljones, O. (1977): Faktorer som påvirker gifte kvinners yrkesdeltaking. Arbeidsnotat (IO 77/1), Statistisk Sentralbyrå.

Luce, R.D. (1959): Individual Choice Behaviour, Wiley, New York.

Luce, R.D. and Suppes, P. (1965): Preference, Utility and Subjective Probability, in Luce, Bush and Galanter, eds. Handbook in Mathmatical Psychology III, Wiley, New York.

McFadden, D. (1973): Conditional Logit Analysis of Qualitative Choice Behaviour. In P. Zarembka, ed. Frontiers in Econometrics, Academic Press, New York.

McFadden, D. and Domencich, T. (1975): Urban travel demand: A behavioral analysis. North-Holland Pub. Company, Amsterdam.

McFadden, D. (1976): Quantal Choice Analysis: A. Survey. Ann. Soc. and Econ. Measurement, 5, 363 - 390.

Mosiman, J.E. (1962): On the Compound Multinomial Distribution, the Multivariate β-distribution, and Correlations among Proportions. Biometrica, 49, 65 - 82.

Singer, B. and Spilerman, S. (1976): Some Methodological Issues in the Analysis of Longitudinal Surveys. Ann. Soc. and Econ. Measurement, 5, 447 - 474.

Thurstone, L. (1927): Psychological Analysis. Am. J. Psychology, 38, 368 - 389.

Thurstone, L. (1927): A Law of Comparative Judgement. Psychol. Rev. 34, 273 - 286.

Yellott, J., I., jr. (1977): The Relationship between Luce's Choice Axiom, Thurstone's Theory of Comparative Judgement, and the Double Exponential Distribution. J. Math. Psychology, 15, 109 - 144.