Arbeidsnotater

STATISTISK SENTRALBYRÅ

IO 73/28

24. oktober 1973

INFERENSTEORI I KONTINGENSTABELLER

Av

Jan F. Bjørnstad

DEL 1: TESTING AV NESTEN UAVHENGIGHET

DEL 2: MULTIPPEL INFERENS I KONTINGENS-TABELLER

Ikke for offentliggjøring. Dette notat er et arbeidsdokument og kan siteres eller refereres bare etter spesiell tillatelse i hvert enkelt tilfelle. Synspunkter og konklusjoner kan ikke uten videre tas som uttrykk for Statistisk Sentralbyrås oppfatning.

FORFATTERENS FORORD

Dette notatet har delvis blitt til på deltidsengasjement ved Statistisk Sentralbyrå. Forfatteren var inntil 1. juli 1973 ansatt ved kontoret for intervju-undersøkelser på deltid. Arbeidet ble påbegynt der sommeren 1971. Det ble da gitt hjelp og veiledning av Ib Thomsen og Jan M. Hoem. Senere, spesielt høsten 1972 fikk forfatteren veiledning av Emil Spjøtvoll. Veiledningen gitt av de tre ovennevnte har spesielt vært til hjelp ved utarbeidelsen av kapitlene I og II i del 1. Notatets endelige form ble til i første halvdel av 1973, da det ble fullstendig forandret og utvidet. Notatet er forfatterens hovedfagsoppgave i statistikk, som her gjengis uendret, bortsett fra at noen trykkfeil er rettet.

INNHOLD

Side

Sammendrag.

Dette arbeidet omhandler forskjellige inferensproblemer i toveis kontingenstabeller.

I del 1 behandles problemet med testing av uavhengighet i en tabell når antall observasjoner er stort. Man er da som regel interessert i å påstå avhengighet bare når avhengigheten er betydelig. Fordi observasjonsmaterialet er stort, vil den eksakte uavhengighetshypotesen nesten alltid forkastes. Det er følgelig et behov for å definere et begrep "nesten uavhengighet", og utvikle tester for hypotesen "nesten uavhengighet".

I del 1-II diskuteres problemet med testing av tilnærmet eksakte, kalt utvidete hypoteser i den multinomiske situasjon med en forsøksrekke. Deretter, i kapittel III, betrakter vi problemet med valg av mål for avhengighet som basis for en hypotese om nesten uavhengighet, og anvender teorien fra kapittel II på testing og intervallestimering av avhengighetsmål.

Bevisene for de fleste resultater i del 1 er samlet i tre appendikser. Det er ikke nødvendig å sette seg inn i bevisene for å følge framstillingen av teorien.

I del 2 angis multiple inferensmetoder ved sammenligning av flere tabeller. Spesielt grundig behandles rangering av tabeller etter grad av avhengighet, og sannsynligheten for feil i rangeringen. Det blir dessuten gitt simultane konfidensintervaller for alle lineære funksjoner og produkt-potenser av avhengighetsmål.

DEL 1: TESTING AV NESTEN UAVHENGIGHET.

I. INNLEDNING.

I.1. Byråets formål med en uavhengighetstest.

Ved testing av uavhengighet mellom to faktorer i en hyppighetstabell har det vært vanlig å bruke en kji-kvadrat-test på hypotesen om at faktorene er eksakt uavhengige. Nå har det vist seg at når antall observasjoner er stort har kji-kvadrat-testen så stor styrke at hypotesen om eksakt uavhengighet nesten alltid forkastes, selv i situasjoner hvor det synes opplagt at avhengigheten er meget liten. I Byrået kan det være aktuelt å bruke uavhengighetstester når man avgjør hvilke tabeller som skal publiseres fra en undersøkelse. Hvis to faktorer ikke er avhengige, er verdien av en tabell for liten til at den bør publiseres, fordi man kan nøye seg med marginalfordelingene over hver faktors kjennetegn. Imidlertid viser det seg at en kji-kvadrat-test nesten alltid forkaster den eksakte uavhengighetshypotesen når utvalget er på minst 2000, og det er det ofte i Byråets intervju-undersøkelser. Den er da dårlig egnet som hjelpemiddel til oppstilling av tabellverket.

Det man egentlig ønsker, er å akseptere uavhengighet mellom to faktorer også når det foreligger en liten grad av avhengighet, dvs. når graden av avhengighet ikke er fagvitenskapelig betydelig. Vi sier da at faktorene er nesten uavhengige. En ønsker altså å påstå avhengighet bare når graden av avhengighet er over en viss størrelse. Dette problemet kan løses ved å utvide den "eksakte" hypotesen til å gjelde også slike situasjoner hvor graden av avhengighet er mindre enn en slik størrelse (dvs. vi lar hypotesen være at det foreligger nesten uavhengighet), og deretter utvikle tester for den utvidete uavhengighetshypotesen.

La oss først gi et eksempel som viser hvor dårlig egnet den klassiske testen kan være for vårt formål når det er mange observasjoner.

Eksempel 1, fra [16].
Vi skal undersøke om det var betydelig avhengighet mellom valgdeltaking og yrke ved Stortingsvalget i 1969. Antall observasjoner (dvs. antall intervju-objekter) i Byråets undersøkelse var n=2702. Det er åtte yrkesgrupper. Med valgdeltaking mener vi om intervju-objektet har stemt eller ikke (ifølge eget utsagn) I yrkesgruppe nr. j viste det seg at X_{1j} personer hadde stemt, mens X_{2j} ikke hadde stemt. Resultatet er gitt i nedenstående tabell.

Tabell 1.

Yrkesgruppe / Valgdeltaking	1	2	3	4	5	6	7	8	I alt
Stemte	169	141	429	618	45	268	753	16	2439
Stemte ikke	19	16	43	56	14	36	75	4	263
I alt	188	157	472	674	59	304	828	20	2702

Kilde: [16]; tabell 17 og 19.

For hver yrkesgruppe kan vi beregne andelen som hadde stemt/ikke stemt. Det gir følgende tabell.

Tabell 2.

Yrkesgruppe	Stemte	Ikke stemte	Antall observasjoner
1	0.90	0.10	188
2	0.90	0.10	157
3	0.91	0.09	472
4	0.92	0.08	674
5	0.76	0.24	59
6	0.88	0.12	304
7	0.91	0.09	828
8	0.80	0.20	20
Alle yrker	0.90	0.10	2702

Kilde: [16], tabell 17.

Det synes rimelig å tro at avhengigheten mellom yrke og valgdeltaking er meget liten. (Det er få observasjoner fra de yrkesgruppene, nr. 5 og 8, som viser betydelig avvik). Imidlertid blir kji-kvadrat-observatoren

$$Z_1 = n\{\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{8} \frac{X_{ij}^2}{X_{i.} X_{.j}} - 1\} = 21.862$$

der $X_{1.} = \sum_{j=1}^{8} X_{1j}$ er antall personer som hadde stemt og $X_{2.} = \sum_{j=1}^{8} X_{2j}$ er antall personer som ikke hadde stemt. $X_{.j} = \sum_{i=1}^{2} X_{ij}$ er antall personer i yrkesgruppe j. Vi må forkaste den eksakte uavhengighetshypotesen for alle a priori gitte nivåer som er større enn 0.005. Kji-kvadrat-testen gir altså et resultat stikk i strid med hva vi finner rimelig ved inspeksjon av tabell 2 ovenfor. (Vi skal senere se at de nye testene vi foreslår i dette notatet vil lede oss til å akseptere uavhengighetshypotesen.)

I.2. Den multinomiske situasjon med en forsøksrekke.

I.2. (i) Generelle betingelser.

Den situasjonen som gjengis nedenfor dekker flere av de tilfeller hvor en kji-kvadrat-test vanligvis anvendes, bl.a.

a) Testing av "goodness of fit". Dvs. vi tester om visse variable har en spesiell fordeling.

b) Testing av uavhengighet mellom to faktorer.

Som før nevnt, er vi spesielt interessert i tilfelle b).

Følgende situasjon betraktes: En forsøksrekke av n uavhengige forsøk utføres. Ved hvert forsøk kan ett og bare ett av r kjennetegn

$$A_1, A_2, \ldots, A_r \tag{1}$$

opptre med sannsynligheter

$$p_1, p_2, \ldots, p_r \tag{2}$$

hvor

$$\sum_{i=1}^{r} p_i = 1 \tag{3}$$

La X_i være antall ganger A_i opptrer i forsøksrekken, og la $q_{in} = X_i/n$, for $i=1,\ldots,r$.

A priori antar vi at sannsynlighetene $p_1,\ldots,p_r$ er ukjente, og $p_i > 0$ for $i=1,\ldots,r$. Vi skal teste en hypotese om at alle p_i er spesifiserte funksjoner av en ukjent parameter $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_m)$ som ligger i et område Ω. Den generelle hypotese er altså

$$H_0 : p_i = \phi_i(\theta) \qquad \text{for } i=1,\ldots r. \tag{4}$$

Det antas at ϕ_i har kontinuerlige partielle deriverte av annen orden. Antall observasjoner n antas å være stort.

I.2. (ii) En kort innføring om BAN-estimatorer.

Situasjonen er den samme som i I.2 (i), og vi vil anta at (4) holder. Neyman, [15], innførte begrepet BAN-estimator hvor BAN er en forkortelse for "best asymptotically normal".

Definisjon 1. En funksjon $\hat{\theta}_k$ av $q_n = (q_{1n},\ldots,q_{rn})$ som er uavhengig av n kalles en BAN-estimator for parameteren θ_k hvis den tilfredsstiller følgende fire betingelser:

(i) $\hat{\theta}_k$ er en konsistent estimator for θ_k, dvs. $\lim P(|\hat{\theta}_k-\theta_k|<\varepsilon) = 1$ for alle $\varepsilon > 0$.

(ii) Den asymptotiske fordeling til $\sqrt{n}(\hat{\theta}_k-\theta_k)$ er normal med forventning null.

(iii) La σ_k^2 være den asymptotiske variansen til $\sqrt{n}\hat{\theta}_k$, og la ν være en annen funksjon som tilfredsstiller (i) og (ii), med asymptotisk varians til $\sqrt{n}\nu$ lik σ^2. Da vil $\sigma_k \leq \sigma$.

(iv) $\hat{\theta}_k$ har kontinuerlige partielle deriverte m.h.p. hver q_{in}, $i=1,\ldots,r$.

Neyman viser at følgende tre typer av estimatorer er BAN-estimatorer:

A. Sannsynlighetsmaksimerings (SM)-estimatoren $\hat{\theta}_k$. $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_m)$ maksimerer

$$\left[\prod_{i=1}^{r} \phi_i(\theta)^{q_{in}}\right]^n \quad . \tag{5}$$

B. Kji-kvadrat-minimeringsestimatoren $\bar{\theta}_k$. $\bar{\theta} = (\bar{\theta}_1,\ldots,\bar{\theta}_m)$

$$Q = \sum_{i=1}^{r} \frac{(X_i-n\phi_i(\theta))^2}{n\phi_i(\theta)} \quad . \tag{6}$$

C. Modifiserte kji-kvadrat-minimeringsestimatoren θ_k^* . $\theta^* = (\theta_1^*,\ldots,\theta_m^*)$ minimerer

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(X_i-n\phi_i(\theta))^2}{X_i} \quad . \tag{7}$$

La nå $\tilde{\theta}_t$ være en estimator for θ_t, for $t=1,..,m$ av type A, B eller C. Sett $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1,\ldots,\tilde{\theta}_m)$.

La
$$Z_1 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(X_i-n\phi_i(\tilde{\theta}))^2}{n\phi_i(\tilde{\theta})} \tag{8}$$

og
$$Z_2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(X_i-n\phi_i(\tilde{\theta}))^2}{X_i} \quad . \tag{9}$$

Neyman([15], Lemma 9, side 267) har vist at fordelingene til Z_1 og Z_2 begge går mot en χ^2-fordeling med r-1-m frihetsgrader under H_0 når n går mot uendelig. Med tilnærmet nivå ε forkaster vi H_0 når

1) $Z_1 > z(r-1-m,\varepsilon)$ (10)

eller

2) $Z_2 > z(r-1-m,\varepsilon)$ (11)

$z(r-1-m,\varepsilon)$ er $(1-\varepsilon)$-fraktilen i kji-kvadrat-fordelingen med r-1-m frihetsgrader.

Tilnærmelsen til kji-kvadrat-fordelingen regnes vanligvis for god når $n\phi_i(\tilde{\theta}) \geq 5$ for $i=1,\ldots,r$.

I.3. Kji-kvadrat-testen anvendt på den eksakte uavhengighetshypotesen.

I.3. (i) Uavhengighetssituasjonen i toveis kontingenstabeller.

Følgende situasjon skal behandles: To faktorer (vil også bli kalt egenskaper), A og B, kan anta henholdsvis v og w kjennetegn $A_1,\ldots,A_v$ og $B_1,\ldots,B_w$. I eksemplet foran var A valgdeltaking og B yrke. Ved hvert forsøk vil ett og bare ett av kjennetegnene $A_1,\ldots,A_v$ inntreffe og samtidig ett og bare ett av kjennetegnene $B_1,\ldots,B_w$. Ved hvert forsøk vil altså ett og bare ett av kjennetegnene A_i & B_j, for $i=1,\ldots,v$ og $j=1,\ldots,w$ inntreffe. Det betyr at vi står ovenfor en multinomisk forsøksrekke med $v\cdot w$ kjennetegn.

Det gjøres n forsøk. Utfallene av de n forsøk er stokastisk uavhengige. I hvert forsøk er sannsynligheten for at A_i & B_j skal opptre lik p_{ij}. Sannsynligheten for A_i er da $p_{i.} = \sum_{j=1}^{w} p_{ij}$, og sannsynligheten for B_j blir $p_{.j} = \sum_{i=1}^{v} p_{ij}$. La X_{ij} være antall ganger A_i & B_j inntreffer i løpet av de n forsøkene. Det statistiske materiale kan stilles opp i en toveis kontingenstabell:

A \ B	B_1	B_2	B_w	Sum
A_1	X_{11}	X_{12}	X_{1w}	$X_{1.}$
A_2	X_{21}	X_{22}	X_{2w}	$X_{2.}$
⋮	⋮			⋮
A_v	X_{v1}	X_{v2}	X_{vw}	$X_{v.}$
Sum	$X_{.1}$	$X_{.2}$	$X_{.w}$	n

Her er $X_{i.} = \sum_{j=1}^{w} X_{ij}$ og $X_{.j} = \sum_{i=1}^{r} X_{ij}$, slik at $X_{i.}$ er antall ganger A_i inntreffer og $X_{.j}$ er antall ganger B_j inntreffer.

Vi vil nå teste om "faktorene A og B er uavhengige". Med det menes at vi skal undersøke om begivenheten at et gitt kjennetegn for A inntreffer, er stokastisk uavhengig av begivenheten at et gitt kjennetegn for B inntreffer i det enkelte forsøk. Denne eksakte uavhengighetshypotesen formaliseres slik:

$$H:\ p_{ij} = p_{i.}p_{.j},\ \text{for } i=1,\dots,v \text{ og } j=1,\dots w. \tag{12}$$

I.3. (ii) Kji-kvadrat-testen.

Vi ser at hypotesen (12) har samme form som (4) med $\theta = (p_{1.},\dots,p_{v-1.},p_{.1},\dots,p_{.w-1})$ og med $m = v+w-2$. SM-estimatorer for $p_{i.}$ og $p_{.j}$ er h.h.vis $\frac{X_{i.}}{n}$ og $\frac{X_{.j}}{n}$. $\frac{X_{i.}}{n}$ og $\frac{X_{.j}}{n}$ er BAN-estimatorer av type A, og

$$Z_1 = \sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{w} \frac{(X_{ij}-n\frac{X_{i.}}{n}\cdot\frac{X_{.j}}{n})^2}{n\cdot\frac{X_{i.}}{n}\cdot\frac{X_{.j}}{n}} = n\left(\sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{w}\frac{X_{ij}^2}{X_{i.}X_{.j}} - 1\right) \tag{13}$$

blir dermed tilnærmet kji-kvadrat-fordelt med (v-1)(w-1) frihetsgrader etter teorien i I.2 (ii). Denne kji-kvadrat-testen for H blir derfor, ifølge (10):

$$\text{Forkast H når } Z_1 > z((v-1)(w-1),\varepsilon)\ . \tag{14}$$

I.4. Statistiske hypoteser som idealisert teori om "virkeligheten".

Som før nevnt synes det, når det er mange observasjoner, som om kji-kvadrat-testen nesten alltid forkaster den eksakte uavhengighetshypotesen. Vi vil nå diskutere nærmere hva årsaken til det kan være.

Det finnes mange situasjoner hvor nullhypotesen bare kan forventes å være tilnærmet sann. I slike situasjoner kan man si at den statistiske hypotesen er en "idealisering av virkeligheten", og vil derfor bli kalt en idealisert hypotese. En idealisert hypotese er altså en hypotese som ikke kan forventes å være eksakt sann. En slik situasjon foreligger, f.eks., når vi tester om variable er normalfordelte. Ofte vil det også være rimelig å tro at to faktorer kan være nesten uavhengige, men ikke eksakt uavhengige. Hvis det er tilfelle, kan det medvirke til at den vanlige uavhengighetstesten forkaster den eksakte hypotesen for store n. Før vi ser nærmere på dette, vil vi først betrakte følgende generelle situasjon.

La X_n være en stokastisk variabel hvis fordeling avhenger av n og av en parameter θ som a priori ligger i et område Ω. La $\omega_0 \subset \Omega$ representere den idealiserte hypotesen i betydningen beskrevet ovenfor. δ er en test for

$$H_0 : \theta \in \omega_0 \qquad (15)$$

med forkastningsområde τ_n.

Definisjon 2. δ er konsistent hvis $P_\theta(X_n \in \tau_n) \underset{n\to\infty}{\to} 1$ for alle $\theta \in \Omega - \omega_0$. (Sannsynligheten for å forkaste hypotesen når den er gal går mot 1 når n går mot uendelig.)

Kji-kvadrat-testene (10) og (11) for hypotesen (4) er begge konsistente (vises i appendiks A). Spesielt er derfor den vanlige kji-kvadrat-testen for den eksakte uavhengighetshypotesen konsistent. Dette medfører at i meget store utvalg vil små og trivielle avvik fra hypotesen (4) nesten sikkert bli oppdaget. Hvis da hypotesen er en idealisert hypotese vil kji-kvadrat-testen nesten alltid forkaste hypotesen når det er mange observasjoner. Dette er selvfølgelig ikke et særegent trekk ved χ^2-testene, men vil gjelde enhver konsistent test for en idealisert hypotese.

Ved testing av en idealisert hypotese er vi som oftest interessert i å forkaste hypotesen bare når den er betydelig gal. Dette vil, som nevnt i I.1 spesielt være tilfelle ved testing av uavhengighet. Den vanlige uavhengighetstesten vil imidlertid, som vi har sett et eksempel på, ofte forkaste den eksakte hypotesen selv i situasjoner hvor det foreligger nesten uavhengighet. Det vil senere bli vist hvordan dette kan unngås. Først vil vi imidlertid nevne et lite "paradoks" som kji-kvadrat-testenes konsistensegenskap leder til, bemerket av Berkson ([1], s. 526-527):

Når det er mange observasjoner, vil vi med et rimelig gitt nivå α forkaste meget ofte, selv i situasjoner hvor den sanne verdi av parameteren er meget nær det idealiserte hypoteseområdet. Det er vel også innlysende at et stort utvalg er å foretrekke framfor et lite utvalg. Hvis vi da på forhånd vet hvilket resultat kji-kvadrat-testen gir ved å bruke den på et stort utvalg, synes det å være liten grunn til å anvende testen på et mindre utvalg, men siden resultatet av testen på et større utvalg er kjent, så er det slett ingen test.

Hodges jr. & Lehmann, [9], mener man kan unngå denne vanskeligheten ved å utvide hypoteseområdet til å gjelde situasjoner nær nok hypotesen, slik at forskjellen ikke er fagvitenskapelig betydelig for det foreliggende problem. La oss i denne forbindelse vende tilbake til den generelle situasjonen med den idealiserte hypotesen (15). Det utvidete hypoteseområdet lar vi være representert ved $\omega_1 \supset \omega_0$. Hvis vi vet $\theta \in \omega_1$ vil vi fremdeles akseptere den idealiserte hypotesen H_0. La nå δ' være en test for den utvidete hypotesen

$$H_1 : \theta \in \omega_1 \tag{16}$$

Testens nivå blir $\max_{\theta\in\omega_1} \beta(\theta)$ hvor $\beta(\theta)$ er styrkefunksjonen til testen δ'.

Det vi gjør er å kontrollere at styrken holder seg under et nivå α i de situasjoner som ikke er betydelig forskjellig fra H_0, dvs. at $\max_{\theta\in\omega_1} \beta(\theta) \leq \alpha$. For konsistente tester vil styrken gå mot 1 i området $\omega_1 - \omega_0$ når n går mot uendelig.

Nå kan det vel innvendes at dette er intet uvanlig. Vi kan bare glemme H_0 og la H_1 være den vanlige hypotesen. Hodges jr. & Lehmann,[9], resonnerer imidlertid på følgende måte: "There is often a practical advantage in keeping H_0, as it is mathematically simple and corresponds to the idea underlying the situation to be tested. The boundaries of H_1 will be less precise in the experimenter's mind. It will usually be best to introduce into the space of parameters a measure, say $\Delta(\theta)$, of the "distance" of θ from H_0 on a scale reflecting at least rougly the materiality of departures from H_0, and then define H_1 as a set of those θ for which $\Delta(\theta)$ does not exceed a specified value Δ_0. The choice of Δ_0 will present problems similar to those encountered in choosing the alternative at which specified power is to be obtained."

I.5. Uavhengighetshypotesen.

Vi vil behandle den eksakte uavhengighetshypotesen som beskrevet ovenfor, dvs. vi ønsker å utvide den eksakte uavhengighetshypotesen til å gjelde situasjoner hvor det foreligger nesten uavhengighet (forkortes til n.u.). Som Hodges jr. & Lehmann foreslår vil vi gjøre dette ved hjelp av et mål for "avstanden" til det sanne parameterpunktet fra den eksakte uavhengighetshypotesen. Det vil da være et mål for grad av avhengighet. Den utvidete hypotesen vil være at dette målet ikke overskrider en viss størrelse c. Følgende tre problemer må derfor diskuteres:

(a) Valg av avhengighetsmål.

Det vil være naturlig å skille mellom flere situasjoner som kan oppstå i en kontingenstabell. Forskjellige mål vil være anvendelige, alt etter hvilken situasjon som foreligger.

(b) Utvidelse av hypoteseområdet.
Denne utvidelsen vil selvfølgelig være avhengig av målet vi velger i den gitte situasjonen.

(c) Utvikling av tester for den utvidete hypotesen som helst tilfredsstiller et nivå α.
Foruten å teste nesten uavhengighet vil vi konstruere konfidensintervaller for de forskjellige avhengighetsmål.

I kapittel III vil det bli gitt en diskusjon over avhengighetsmål, og naturlige utvidelser til n.u. basert på de forskjellige avhengighetsmål. Først vil vi imidlertid, i kap. II, betrakte problem (c), for generelle utvidete hypoteser i en multinomisk forsøksrekke. Betingelsene gitt i I.2 vil vi anta holder i kap. II. Teorien utviklet i kapittel II vil anvendes på testing og intervallestimering av avhengighetsmål.

En tre-desisjonsprosedyre på problemet vil også bli betraktet. Bevisene for de fleste resultater i kapittel II og III er gitt i appendiks B og C. Grunnen til det er at utviklingen av teorien da vil bli enklere og mer oversiktlig å følge. Dessuten vil dermed teorien være lettere tilgjengelig for lesere som ikke har interesse av bevisene.

II. TESTING AV UTVIDETE HYPOTESER I DEN MULTINOMISKE SITUASJON MED EN FORSØKSREKKE.

II.1. En fjerde type av BAN-estimatorer.

Før vi utleder teorien for testing av utvidete hypoteser, skal vi først innføre en fjerde type, D, av BAN-estimatorer (se [15], Teorem 5 og 6, s. 251 og s. 257). Vi tenker oss da følgende situasjon. Betrakt en multinomisk forsøksrekke med r klasser, som i I.2(i). La $p' = (p_1,\dots,p_{r-1})$. Vi vil anta at det er μ restriksjoner på sannsynlighetene $p_1,\dots,p_{r-1}$ idet vi lar $p_r = 1 - \sum_{i=1}^{r-1} p_i$:

$$F_t(p') = F_t(p_1,\dots,p_{r-1}) = 0 \quad \text{for } t=1,2,\dots,\mu \ (\mu \leq r-1) \tag{17}$$

$$\text{La } Q_1 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(X_i - np_i)^2}{X_i} . \tag{18}$$

Her er X_i antall observasjoner i i'te klasse for $i=1,\dots,r$. n er antall forsøk. F_t antas å ha kontinuerlige partielle deriverte av annen orden. Fra I.2 (ii) vet vi at minimering av Q_1 under (17) leder til BAN-estimatorer for p_i-ene av type C (forutsatt at p' tilfredsstiller (17)).

$$\text{La } c_{t,i,j} = \left.\frac{\partial F_t}{\partial \rho_i \partial \rho_j}\right|_{\rho'=\theta p'+(1-\theta)q_n'} \quad \text{for } t=1,\dots,\mu,\ i=1,\dots,r-1,\ j=1,\dots,r-1.$$

Her $\rho' = (\rho_1,\dots,\rho_{r-1})$ og $q_n' = (q_{1n},\dots,q_{r-1,n})$, og $|\theta| \leq 1$.

$$\text{La videre } b_{t,i} = \left.\frac{\partial F_t}{\partial p_i}\right|_{p'=q_n'} . \qquad \text{Ved Taylor's utvikling:}$$

$$F_t(p') = F_t^*(p',q_n') + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j=1}^{r-1} c_{t,i,j}(p_i-q_{in})(p_j-q_{jn}) \quad \text{hvor}$$

$$F_t^*(p',q_n') = F_t(q_n') + \sum_{i=1}^{r-1} b_{t,i}(p_i-q_{in}) \tag{19}$$

Neyman, [15], viser at minimering av Q_1 under de lineære bibetingelsene

$$F_t^*(p',q_n') = 0 \tag{20}$$

leder til BAN-estimator $\hat{p}_i$ for p_i når p' tilfredsstiller (17), for $i=1,\dots,r-1$. La så $\hat{p}_r = 1 - \sum_{i=1}^{r-1} p_0$. Fjerde type, D, av BAN-estimatorer for $p = (p_1,\dots,p_r)$ er da lik $\hat{p} = (\hat{p}_1,\dots,\hat{p}_r)$.

II.2. Tester for utvidete hypoteser.

II.2. (i) Generell situasjon.

Situasjonen som betraktes er en multinomisk forsøksrekke med r klasser, beskrevet i I.2 (i). n forsøk utføres.

Siden $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$, så ligger punktet $p = (p_1,\ldots,p_r)$ på et hyperplan i det r-dimensjonale euklidske rom. Den vanlige hypotesen for p vil være:

$$H : \text{ p ligger på en spesifisert flate } \zeta \quad . \tag{21}$$

(Som regel vil dette være en idealisert hypotese i betydningen fra I.4.) Det enkleste tilfelle er en helt spesifisert hypotese: $p = p^0 = (p_1^0,\ldots,p_r^0)$. ζ består da av det ene punktet p^0.

Istedenfor å teste H, vil vi nå være interessert i å teste en utvidet hypotese om at p ligger i et område så nær ζ slik at "ζ nesten er sann".

La nå d(p) være en ikke-negativ funksjon av p, betraktet som et mål for avstanden til ζ fra punktet p.

I uavhengighets-situasjonen vil d(p) være et avhengighetsmål. En naturlig forutsetning på d vil være at: $d(p) = 0 \Leftrightarrow p \in \zeta$. Imidlertid vil dette ikke holde for en rekke mål for avhengighet. Derimot vil vi alltid ha oppfylt følgende: $p \in \zeta \Rightarrow d(p) = 0$, hvor nå ζ betegner den eksakte uavhengighets-hypotesen.

Funksjonen d vil antas å ha kontinuerlige partielle deriverte. Den utvidete hypotesen kan nå formuleres slik:

$$H^*: d(p) \leq c \quad \text{mot} \quad d(p) > c \quad . \tag{22}$$

Her er c bestemt slik at "H nesten er sann" under H^*.

La oss først betrakte randhypotesen

$$H' : d(p) = c \quad .$$

Under visse betingelser kan vi anvende teorien fra [15], kap. 4 på H'. Det vi trenger er følgende:

La oss anta at avstandsmålet d er bestemt. For å anvende Neymans teori er det tilstrekkelig (vet ikke om det er nødvendig) å vise at det eksisterer $\Theta_1,\ldots,\Theta_{r-2}$ og funksjoner $f_1,\ldots,f_r$ slik at

$p_i = f_i(d,\Theta_1,\ldots,\Theta_{r-2})$ og f_i har kontinuerlige partielle deriverte av annen orden for $i=1,2,\ldots,r$. (23)

Hodges jr. & Lehmann har, ser det ut til, ikke vært klar over dette problemet (se [9]). En av de situasjoner hvor forutsetningen (23) er oppfylt er nå ζ består av et enkelt punkt p^0 og $\{d(p)\}^{\frac{1}{2}}$ er den euklidske avstand fra p^0 til p. Resultatet kan uttrykkes slik:

LEMMA 1. La $d(p) = \sum_{i=1}^{r} (p_i - p_i^0)^2$. *Da eksisterer (polarkoordinater)* $\theta_1,\ldots,\theta_{r-2}$ *og funksjoner* $f_1,\ldots,f_r$ *slik at (23) holder.*

Beviset består i å uttrykke punktet $p-p^0 = (p_1-p_1^0,\ldots,p_r-p_r^0)$ på polarkoordinatform.

I uavhengighets-situasjonen har det ikke lykkes for våre valg av d å finne $\theta_1,\ldots,\theta_{r-2}$ slik at (23) holder. Vi vil derfor først behandle det generelle tilfelle at (23) ikke nødvendigvis holder. La oss nå definere en rekke begreper og notasjoner vi vil benytte oss av:

Definisjon 3. La X, X_n, $n=1,2,\ldots$ være stokastiske variable med fordelingsfunksjoner lik F, F_n, definert ved $F(x) = P(X \leq x)$ og $F_n(x) = P(X_n \leq x)$ for $n=1,2,\ldots$. X_n konvergerer i fordeling mot X, notasjon $X_n \xrightarrow{D} X$, hvis

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) \qquad \text{for alle kontinuitetspunkter til } F.$$

Definisjon 4. Notasjonen $X \sim N(\mu,\sigma)$ betyr at X er normalfordelt med forventning μ og varians σ^2. La $x(p)$ betegne $(1-p)$-fraktilen i $N(0,1)$, og la Φ betegne fordelingsfunksjonen til $X \sim N(0,1)$. Notasjonen $Z \sim \chi_k^2$ betyr at Z er kji-kvadrat-fordelt med k frihetsgrader. La $z(k,p)$ være $(1-p)$-fraktilen i χ_k^2.

Definisjon 5. Dersom $X_n \xrightarrow{D} X$ og $X \sim N(0,1)$ skriver vi ofte bare $X_n \xrightarrow{D} N(0,1)$. Likeledes vil $X_n \xrightarrow{D} X \sim \chi_k^2$ ofte uttrykkes ved $X_n \xrightarrow{D} \chi_k^2$.

Definisjon 6. X_n konvergerer i sannsynlighet mot X, $X_n \xrightarrow{p} X$, hvis

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \leq \varepsilon) = 1 \quad \text{for alle } \varepsilon > 0.$$

La nå d være en funksjon i r variable med kontinuerlige partielle deriverte, ikke nødvendigvis ikke-negativ.

La videre

$$\sigma_d^2 = \sum_{i=1}^{r} p_i (a_i - \bar{a})^2 \tag{24}$$

hvor

$$a_i(p) = \frac{\partial d}{\partial p_i} \quad \text{for } i=1,\ldots,r$$

og

$$\bar{a}(p) = \sum_{i=1}^{r} a_i p_i \;.$$

Konsistente estimatorer (betegnes med K-estimatorene) for d(p) og σ_d^2 er gitt ved henholdsvis

$$\hat{d}_n = d(q_n) \quad \text{og} \quad S_d^2 = \sum_{i=1}^{r} q_{in}(\hat{a}_i - \hat{\bar{a}})^2 \tag{25}$$

hvor $\hat{a}_i = a_i(q_n) = \frac{\partial \hat{d}}{\partial q_{in}}$ og $\hat{\bar{a}} = \bar{a}(q_n) = \sum_{i=1}^{r} \hat{a}_i q_{in}$.

Her er $q_{in} = X_i/n$ og $q_n = (q_{1n},\ldots,q_{rn})$ som i I.2 (i).
Det fundamentale resultat for vårt problem er følgende:

TEOREM 1. Anta det eksisterer i slik at

$$\frac{\partial d}{\partial p_i} \neq \sum_{j=1}^{r} p_j \frac{\partial d}{\partial p_j} \qquad (a_i \neq \bar{a}) \tag{26}$$

Da vil

$$1)\ \frac{\sqrt{n}(\hat{d}_n - d)}{\sigma_d} \xrightarrow{D} N(0,1) \quad \textit{og} \quad 2)\ \frac{\sqrt{n}(\hat{d}_n - d)}{S_d} \xrightarrow{D} N(0,1) \;.$$

Det er klart at dersom $d \in [M_1,M_2]$ kan ikke konvergensen i teorem 1 holde hvis $d(p)=M_1$ eller $d(p)=M_2$. For la $d(p)=M_1$. Da er de variable i 1) og 2) ikke-negative for alle n. Tilsvarende vil de variable være ikke-positive hvis $d=M_2$. La oss vise at betingelsen (26) faktisk medfører at $d \in \langle M_1,M_2\rangle$. Vi lar ϕ være en funksjon i r-1 variable slik at

$$\phi(y_1,\ldots,y_{r-1}) = d(y_1,\ldots,y_{r-1},1-\sum_{i=1}^{r-1} y_i)$$

for $y' = (y_1,\ldots,y_{r-1}) \in S = \{(v_1,\ldots,v_{r-1}) | v_i \geq 0 \text{ for } i=1,\ldots,r-1 \text{ og } \sum_{i=1}^{r-1} v_i \leq 1\}$.

La tilsvarende

$$\hat{\phi}_n = \phi(q_{1n},\ldots,q_{r-1,n}) = \hat{d}_n \;.$$

Videre lar vi $b_i(p') = \frac{\partial \phi}{\partial y_i}\Big|_{y=p'}$ for $i=1,\ldots,r-1$. Siden $p_i > 0$ for $i=1,\ldots,r$ så er p' et indre punkt i S og dermed has at $b_i = a_i - a_r$. Anta det eksisterer

M_1, M_2, endelige tall, slik at $d \in [M_1, M_2]$ for alle mulige positive verdier av klassesannsynlighetene $p_1, \ldots, p_r$. La $d = \phi = M_1$ eller $d = \phi = M_2$. Siden p' er et indre punkt i S vil det medføre at

$$0 = b_i(p') = a_i(p) - a_r(p) \qquad \text{for } i=1,\ldots,r-1,$$

hvilket gir $a_i = \bar{a}$, for $i=1,\ldots,r$. Dermed er det vist at (26) medfører $d(p) \in \langle M_1, M_2 \rangle$. Spesielt hvis d er en ikke-negativ funksjon vil (26) medføre at $d(p) > 0$.

Q_1 definert ved (18) kan uttrykkes slik:

$$Q_1 = n \sum_{i=1}^{r} \frac{(q_{in} - p_i)^2}{q_{in}}$$

La oss anta at d har kontinuerlige partielle deriverte av annen orden, slik at ϕ også har kontinuerlige partielle deriverte av annen orden. BAN-estimatorer under H' for $p = (p_1, \ldots, p_r)$ av type D fås ved å minimere Q_1 under bibetingelsene

$$\begin{aligned} &\hat{\phi}_n + \sum_{i=1}^{r-1} b_i(q_n')(p_i - q_{in}) - c = 0 . \\ &p_r = 1 - \sum_{i=1}^{r-1} p_i . \end{aligned} \qquad (27)$$

Hvis $q_{in} > 0$ for $i=1,\ldots,r$, noe som må være oppfylt, dersom Q_1 skal være veldefinert, vil q_n' være et indre punkt i S og dermed vil $b_i(q_n') = \hat{a}_i - \hat{a}_r$, slik at betingelsene (27) er ekvivalent med:

$$\begin{aligned} &\hat{d}_n + \sum_{i=1}^{r} \hat{a}_i(p_i - q_{in}) - c = 0 . \\ &p_r = 1 - \sum_{i=1}^{r-1} p_i . \end{aligned} \qquad (28)$$

TEOREM 2. La $\hat{p} = (\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_r)$ *være BAN-estimator for* p *under* H': $d(p) = c$, *av type* D. *Da er*

$$Z_1 = \min_{(27)} Q_1 = n \sum_{i=1}^{r} \frac{(q_{in} - \hat{p}_i)^2}{q_{in}} = n \frac{(\hat{d}_n - c)^2}{s_d^2} . \qquad (29)$$

Korollar 1. Under H' *og (26) så vil* $Z_1 \xrightarrow{D} \chi_1^2$

Dette viser at selv om (23) ikke holder, så vil Z_1 være asymptotisk kji-kvadrat-fordelt med en frihetsgrad under H', såfremt d har kontinuerlige partielle deriverte av annen orden. (For det tilfelle at (23) holder kan Lemma 12, s. 268 i [15] anvendes).

En test for den utvidete hypotesen H^* er nå gitt ved:

Forkast H^* når

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{d}_n - c)}{S_d} > x(\alpha) \quad . \tag{30}$$

La oss kalle denne testen for normaltesten (N-testen) for utvidete hypoteser i den multinomiske situasjon.

La $\beta_n(p)$ være styrkefunksjonen for testen, dvs.

$$\beta_n(p) = P_p\left(\frac{\sqrt{n}(\hat{d}_n - c)}{S_d} > x(\alpha)\right).$$

Styrkefunksjonen har følgende asymptotiske egenskap (såfremt forutsetningen i teorem 1 er oppfylt).

TEOREM 3.

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n(p) = \begin{cases} 0 & \mathit{for}\ d(p) < c \\ \alpha & \mathit{for}\ d(p) = c \\ 1 & \mathit{for}\ d(p) > c \end{cases} \tag{31}$$

N-testen (30) er altså konsistent, og vil for store n ha tilnærmet nivå lik α.

II.2. (ii) En spesiell situasjon med anvendelse av Neymans teori.

La oss nå betrakte den spesielle situasjon at (23) holder. (Det er dette tilfelle som Hodges jr. & Lehmann betrakter, se [9].) Mer presist vil vi anta at

$$p_i = f_i(d, \theta, \ldots, \theta_{r-2}) \quad \text{for } i=1,\ldots,r,$$

hvor f_i har kontinuerlige partielle deriverte av annen orden. Vi betrakter først randhypotesen

$$H': d = c \quad .$$

La $\tilde{p} = (\tilde{p}_1,\ldots,\tilde{p}_r)$ være BAN-estimatorer for $p = (p_1,\ldots,p_r)$ under H' av type A,B, C eller D. I denne situasjonen vil BAN-estimatorene av type A, B og C være følgende: (Se I.2 (ii)):

A. $\tilde{p} = \hat{p}$, hvor $\hat{p}_i = f_i(c,\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_{r-2})$ for $i=1,\ldots,r$. $\hat{\theta}_i$ er SM-estimator for θ_i, $i=1,\ldots,r-2$ under H'. Dvs. $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_{r-2})$ maksimerer $[\prod_{i=1}^{r} f_i(c,\theta_1,\ldots,\theta_{r-2})^{q_{in}}]^n$.

B. $\tilde{p} = \bar{p}$, hvor $\bar{p}_i = f_i(c,\bar{\theta}_1,\ldots,\bar{\theta}_{r-2})$ for $i=1,\ldots,r$. $\bar{\theta} = (\bar{\theta}_1,\ldots,\bar{\theta}_{r-2})$ minimerer $Q = n\sum_{i=1}^{r}\frac{(q_{in}-f_i(c,\theta))^2}{f_i(c,\theta)}$.

C. $\tilde{p} = p^*$, hvor $p_i^* = f_i(c,\theta_1^*,\ldots,\theta_{r-2}^*)$ for $i=1,\ldots,r$. $\theta^* = (\theta_1^*,\ldots,\theta_{r-2}^*)$ minimerer $Q_1 = n\sum_{i=1}^{r}\frac{(q_{in}-f_i(c,\theta))^2}{q_{in}}$.

I tilfelle B og C vil minimeringen være ekvivalent med

1) Minimere $n\sum_{i=1}^{r}\frac{(q_{in}-p_i)^2}{p_i}$ under bibetingelsen $d(p) = c$.

2) Minimere $n\sum_{i=1}^{r}\frac{(q_{in}-p_i)^2}{q_{in}}$ under bibetingelsen $d(p) = c$.

Fra [15], Lemma 12, s. 268, har vi følgende resultat.

LEMMA 2. La $\tilde{p}_i$ *være en BAN-estimator for* p_i *under* H', *av type* A, B, C *eller* D *for* $i=1,\ldots,r$. *Da vil under* H',

$$\chi_b^2 = n\sum_{i=1}^{r}\frac{(q_{in}-\tilde{p}_i)^2}{\tilde{p}_i} \xrightarrow{D} \chi_1^2$$

og

$$\chi_b^{*2} = n\sum_{i=1}^{r}\frac{(q_{in}-\tilde{p}_i)^2}{q_{in}} \xrightarrow{D} \chi_1^2 .$$

Spesielt vil, hvis $\tilde{p}_i$ er BAN-estimator av type D, $\chi_b^{*2} = Z_1 \xrightarrow{D} \chi_1^2$ som før nevnt. Hodges jr. & Lehmann ([9], s. 267) foreslår følgende tester for den utvidete hypotesen H^*, (som nå kan anvendes siden (23) holder):

TEST I:

Forkast H^* hvis

$$\hat{d}_n > c \tag{32a}$$

$$\text{og} \quad n\sum_{i=1}^{r}\frac{(q_{in}-\tilde{p}_i)^2}{\tilde{p}_i} > z(1,2\alpha) . \tag{32b}$$

TEST II:

Forkast H^* hvis

$$\hat{d}_n > c \tag{33a}$$

og $$n \sum_{i=1}^{r} \frac{(q_{in}-\tilde{p}_i)^2}{q_{in}} > z(1,2\alpha). \tag{33b}$$

Det viser seg at asymptotisk er testene I og II i en bestemt betydning ekvivalente. For å presisere hva denne asymptotiske ekvivalensen består i, betrakt den generelle situasjon hvor X_n er en stokastisk variabel hvis fordeling avhenger av n, og av en parameter θ som a priori ligger i et område Ω. Vi er interessert i å teste hypotesen

$$H : \theta \in \omega_0 \qquad \text{mot} \qquad \theta \in \Omega - \omega_0 \tag{34}$$

La ϕ_1^n, ϕ_2^n være to ikke-randomiserte tester for H. $\phi_i^n(x)$ angir den betingede sannsynlighet for å forkaste H gitt at $X_n=x$ er observert.

Definisjon 7. ϕ_1^n og ϕ_2^n kalles asymptotisk ekvivalente (a.e.), hvis for for enhver $\theta \in \Omega$, sannsynligheten for at ϕ_1^n og ϕ_2^n skal motsi hverandre konvergerer mot null, når n øker mot uendelig. Dvs. at for alle $\theta \in \Omega$, så vil

$$\lim_{n\to\infty} P(\phi_1^n=1 \cap \phi_2^n=0/\theta) + \lim_{n\to\infty} P(\phi_1^n=0 \cap \phi_2^n=1/\theta) = 0 \quad . \tag{35}$$

Følgende lemma vil være nyttig for å vise ekvivalensen av testene i I og II.

LEMMA 3. Anta ϕ_1^n, ϕ_3^n er a.e. tester for hypotesen (34), likeså ϕ_2^n, ϕ_3^n. Da vil ϕ_1^n, ϕ_2^n være asymptotisk ekvivalente.

Korollar 2. 2α-nivå testene i (32b) og (33b) for $H' : d = c$ er (parvis) asymptotisk ekvivalente.

Dette resultat følger direkte fra [15], teorem 7 og lemma 3 ovenfor.

La nå ϕ_1^n og ϕ_2^n være to av testene i (32b) og (33b), vilkårlig valgte. De to tilsvarende tester for H^* betegnes med ψ_1^n og ψ_2^n, dvs.:

$$\psi_i^n = 1 \quad \text{hvis og bare hvis } \hat{d}_n > c \text{ og } \phi_i^n = 1 \quad . \tag{36}$$

Herav følger at

$$\lim_{n\to\infty} P(\psi_1^n = 1 \cap \psi_2^n = 0/p) + \lim_{n\to\infty} P(\psi_1^n = 0 \cap \psi_2^n = 1/p)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(\hat{d}_n > c \;\; \phi_1^n = 1 \cap \phi_2^n = 0/p) + \lim_{n\to\infty} P(\hat{d}_n > c \cap \phi_1^n = 0 \cap \phi_2^n = 1/p)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} P(\phi_1^n = 1 \cap \phi_2^n = 0/p) + \lim_{n\to\infty} P(\phi_1^n = 0 \cap \phi_2^n = 1/p) = 0 \quad \text{for alle } p$$

fra korollar 2.

Dermed er ekvivalensen mellom testene i I og II for H^* vist:

LEMMA 4. Testene i I og II for H^* *er asymptotisk ekvivalente.*

Siden $z(1,2\alpha) = x^2(\alpha)$ ser vi at N-testen faller sammen med test II når $\tilde{p}_i$ er av type D. Dermed er N-testen asymptotisk ekvivalent med de 7 andre testene i I og II såfremt (23) holder.

Egentlig består test I og II hver av fire forskjellige tester. La nå $\beta_{k,n}(p)$, for $k=1,\ldots,8$, være styrkefunksjonene for disse åtte testene. De vil ha samme asymptotiske egenskap som styrkefunksjonen for N-testen gitt ved (30), dvs.

TEOREM 4. Anta (26) holder. Da vil

$$\textit{for } k=1,\ldots,8: \quad \lim_{n\to\infty} \beta_{k,n}(p) = \begin{cases} 0 & \text{for } d(p) < c \\ \alpha & \text{for } d(p) = c \\ 1 & \text{for } d(p) > c \end{cases} . \qquad (37)$$

II.2. (iii) Kommentarer og et eksempel.

Som før nevnt, har vi ikke kunnet vise at (23) er oppfylt ved våre valg av avhengighetsmål i kontingenstabeller. Vi vil derfor anvende N-testen i den situasjonen. Det er verdt å merke seg at for å anvende Neymans teori må vi kreve at avstandsmålet d har kontinuerlige partielle deriverte av annen orden. Derimot er det tilstrekkelig at d bare har kontinuerlige partielle deriverte for å anvende N-testen. La oss gi et eksempel på valg av **d** for en helspesifisert hypotese og anvendelse av N-testen (tatt fra [9]).

Eksempel. La den idealiserte hypotesen være:

$$H : p_1 = p_2 = \ldots = p_r = \frac{1}{r} , \qquad (38)$$

og velg $d = \sum_{i=1}^{r} (p_i - \frac{1}{r})^2$.

Som man ser, har vi her et spesialtilfelle av situasjonen i lemma 1, slik at ved dette valg av d er (23) oppfylt.

Flaten ζ består av punktet: $p^0 = (\frac{1}{r},\ldots,\frac{1}{r})$.

Den utvidete hypotesen:

$$H^* : \sum_{i=1}^{r} (p_i - \frac{1}{r})^2 \leq c \quad .$$

Vi finner med dette valg av d:

$$\hat{d}_n = \sum_{i=1}^{r} (q_{in} - \frac{1}{r})^2$$

$$\hat{a}_i = 2(q_{in} - \frac{1}{r}) \;, \quad \hat{\bar{a}} = 2 \sum_{i=1}^{r} q_{in}^2 - 2 \cdot \frac{1}{r}$$

og

$$S_d^2 = 4 \sum_{i=1}^{r} q_{in}(q_{in} - \sum_{j=1}^{r} q_{jn}^2)^2$$

N-testen for H^* blir:

Forkast H^* hvis:

$$\sqrt{n}\,\frac{\sum_{i=1}^{r} (q_{in} - \frac{1}{r})^2 - c}{2\{\sum_{i=1}^{r} q_{in}(q_{in} - \sum_{j=1}^{r} q_{jn}^2)^2\}^{\frac{1}{2}}} > x(\alpha).$$

II.3. En tre-desisjons-prosedyre.

Det kan oppstå situasjoner hvor man vil være interessert i å trekke en av tre mulige slutninger av typen:

1) Påstå $d < c_1$ eller 2) Påstå $d > c_2$ $(c_2 > c_1)$ eller

3) unnlate å påstå noe; (dvs. i realiteten å akseptere $d \in [c_1, c_2]$.)

En tre-desisjons prosedyre for dette problemet er følgende:

1) Påstå $d < c_1$ hvis $\sqrt{n}\,\frac{\hat{d}_n - c_1}{S_d} < -x(\alpha)$ (39)

2) Påstå $d > c_2$ hvis $\sqrt{n}\,\frac{\hat{d}_n - c_2}{S_d} > x(\alpha)$ (40)

3) Dersom verken (39) eller (40) gjelder, unnlate å påstå noe.

La oss kalle denne prosedyre for N_3-metoden.

N_3-metoden har følgende asymptotiske egenskap dersom forutsetningene i teorem 1 er oppfylt.

TEOREM 5. $\lim_{n\to\infty} P(\textit{minst en gal påstand}) = \begin{cases} \alpha & \textit{for } d=c_1 \ \textit{eller } d=c_2 \\ 0 & \textit{ellers} \end{cases}$

I uavhengighets-situasjonen vil dette bety at man enten påstår nesten uavhengighet ($d<c_1$) eller påstår sterk avhengighet ($d>c_2$) eller ingenting. Dvs. c_1, c_2 er valgt s.a. $d \leq c_1$ betyr n.u. og $d \geq c_2$ betyr sterk avhengighet.

Den vanlige n.u. hypotesen: $d \leq c$, er passende når man først og fremst er interessert i eventuelt å fastslå om det foreligger avhengighet. I de tilfeller hvor man er mer interessert i å fastslå enten n.u. eller sterk avhengighet kan en tre-desisjons prosedyre som N_3 være anvendelig.

II.4. Konfidensintervaller for avstandsmål.

For å konstruere et konfidensintervall for et valgt mål $d(p)$ med asymptotisk konfidensgrad lik $1 - \alpha$, vil vi anvende teorem 1. d vil som i II.2 (i), antas å ha kontinuerlige partielle deriverte. Anta videre at $M_1 < d(p) < M_2$ og at det eksisterer i slik at $a_i \neq \bar{a}$. Teorem 1 og setn. H i appendiks B gir da at

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{n}\,\frac{(\hat{d}_n - d)}{S_d} < y\right) = \Phi(y) \text{ for alle } y.$$

Dette medfører

$$\lim_{n\to\infty} P\left(-x(\tfrac{\alpha}{2}) < \sqrt{n}\,\frac{(\hat{d}_n - d)}{S_d} < x(\tfrac{\alpha}{2})\right) = 1 - \alpha \tag{41}$$

(41) er ekvivalent med:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\hat{d}_n - \frac{S_d}{\sqrt{n}}\,x(\tfrac{\alpha}{2}) < d < \hat{d}_n + \frac{S_d}{\sqrt{n}}\,x(\tfrac{\alpha}{2})\right) = 1 - \alpha.$$

Siden $M_1 < d(p) < M_2$, så vil følgende ekvivalens gjelde

$$\hat{d}_n - \frac{S_d}{\sqrt{n}}\,x(\tfrac{\alpha}{2}) < d < \hat{d}_n + \frac{S_d}{\sqrt{n}}\,x(\tfrac{\alpha}{2})$$
$$\Updownarrow$$
$$\max\left(M_1, \hat{d}_n - \frac{S_d}{\sqrt{n}}\,x(\tfrac{\alpha}{2})\right) < d < \min\left(M_2, \hat{d}_n + \frac{S_d}{\sqrt{n}}\,x(\tfrac{\alpha}{2})\right).$$

Herav:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\max\left(M_1, \hat{d}_n - \frac{S_d}{\sqrt{n}}\,x(\tfrac{\alpha}{2})\right) < d < \min\left(M_2, \hat{d}_n + \frac{S_d}{\sqrt{n}}\,x(\tfrac{\alpha}{2})\right)\right\} = 1 - \alpha.$$

Et konfidensintervall for $d(p)$ med tilnærmet konfidensgrad lik $1 - \alpha$ for store n er dermed gitt ved:

$$d(p) \in \langle \max (M_1, \hat{d}_n - \frac{S_d}{\sqrt{n}} x(\frac{\alpha}{2})) \quad , \min (M_2, \hat{d}_n + \frac{S_d}{\sqrt{n}} x(\frac{\alpha}{2})) \rangle . \qquad (42)$$

I neste kapittel vil vi behandle uavhengighets-situasjonen i toveis kontingenstabeller. Vanligvis vil M_1 være lik 0, men det vil også opptre situasjoner hvor det er naturlig å skille mellom retninger av avhengighet, slik at målene i de situasjonene kan være negative. De vil variere i intervallet $\langle -1,1 \rangle$, slik at $M_2 = -M_1 = 1$.

Ensidige konfidens-intervaller for positive d(p) (M_1=0) fås av følgende:

$$\lim_{n \to \infty} P(\sqrt{n} \, (\frac{(\hat{d}_n - d)}{S_d} < x(\alpha)) = 1 - \alpha .$$

Herav: Et ensidig konfidens-intervall for d(p) er gitt ved

$$d(p) \in \langle \max (0, \hat{d}_n - \frac{S_d}{\sqrt{n}} x(\alpha)), M \rangle \qquad (43)$$

hvis $d(p) < M$. La $k(q_n) = \hat{d}_n - \frac{S_d}{\sqrt{n}} x(\alpha)$ og anta $k(q_n) > 0$.
Vi ser at for alle $c < k(q_n)$ så vil

$$H^* : d(p) \leq c$$

forkastes ved N-testen:

$$c < k(q_n) \Longleftrightarrow 0 < d_n - c - \frac{S_d}{\sqrt{n}} x(\alpha) \Longleftrightarrow \hat{d}_n - c > \frac{S_d}{\sqrt{n}} x(\alpha) \Longleftrightarrow \frac{\sqrt{n}(\hat{d}_n - c)}{S_d} > x(\alpha).$$

M.a.o. mengden $\{d \leq k(q_n)\}$ er det maksimale utvidete hypoteseområdet som blir forkastet når q_n er observert.

Dersom $k(q_n)$ er tilstrekkelig liten vil vi akseptere at den eksakte hypotesen: $d(p) = 0$, er tilnærmet sann.

Hvis $k(q_n) \leq 0$ ser man at alle hypoteser H: $d(p) \leq c$, $c > 0$ aksepteres (ved nivå α).

III. TESTING AV NESTEN UAVHENGIGHET.
EN OVERSIKT OVER AVHENGIGHETSMÅL I KONTINGENSTABELLER.

III.1. Forutsetninger og notasjoner.

Problemene som skal betraktes refererer seg til situasjonen i toveis kontingenstabeller, beskrevet i I.3. (i).

La Y, Z være to stokastiske variable definert ved

$$\begin{aligned} Y &= i \quad \text{hvis } A_i \text{ inntreffer} \quad \text{for } i=1,\dots,v. \\ Z &= j \quad \text{hvis } B_j \text{ inntreffer} \quad \text{for } j=1,\dots,w. \end{aligned} \tag{44}$$

At A og B er eksakt uavhengige betyr da pr. definisjon at Y og Z er stokastisk uavhengige.

Den eksakte uavhengighets-hypotesen kan uttrykkes slik:

$$H: p_{ij} = p_{i.}p_{.j} \quad \text{for } i=1,\dots,v \text{ og } j=1,\dots,w \tag{45}$$

hvor $p_{ij} = P(Y=i \cap Z=j)$, $p_{i.} = P(Y=i)$ og $p_{.j} = P(Z=j)$.
La $q_{ij} = X_{ij}/n$, hvor n er antall uavhengige forsøk som utføres (dvs. det tas n observasjoner $(y_1,z_1),\dots,(y_n,z_n)$ av (Y,Z)), og X_{ij} er antall ganger A_i & B_j inntreffer i løpet av de n forsøk. n antas å være stor.
La videre $q_{i.} = \sum_{j=1}^{w} q_{ij}$ og $q_{.j} = \sum_{i=1}^{v} q_{ij}$, slik at $X_{i.}=nq_{i.}$, $X_{.j} = nq_{.j}$.
Sett $q = (q_{11},\dots,q_{vw})$ og $p = (p_{11},\dots,p_{vw})$. Ved konstruksjonen av de forskjellige målene, legges ingen restriksjoner på p_{ij}-ene (annet enn at $\sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{w} p_{ij}=1$). Ved testing og estimering (dvs. ved bruk av asymptotisk fordelingsteori) vil vi derimot anta at $p_{ij} > 0$ for $i=1,\dots,v$ og $j=1,\dots,w$.
For ethvert valg av avhengighetsmål d antas dessuten at følgende betingelser er oppfylt.*)

(a) d har kontinuerlige partielle deriverte.

(b) Det eksisterer (r,s) slik at (46)

$$\frac{\partial d}{\partial p_{rs}} \neq \sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{w} p_{ij}\frac{\partial d}{\partial p_{ij}} \,.$$

Følgende notasjoner for et gitt avhengighetsmål d benyttes (hvis ikke noe annet presiseres):

$$\sigma_d^2 = \sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{w} p_{ij}(d_{ij}-d^*)^2 \tag{47}$$

---

*) Tre mål foreslått av Goodman & Kruskal, [6], som vil bli diskutert senere, oppfyller ikke (a). Det er imidlertid utviklet en tilsvarende teori for disse mål i [8].

hvor

$$d_{ij} = \frac{\partial d}{\partial p_{ij}} \quad \text{for } i=1,\dots,v \text{ og } j=1,\dots,w$$

og

$$d^* = \sum_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{w} d_{ij} p_{ij} \quad .$$

Videre:

$$\hat{d} = d(q) \text{ , } \hat{d} \text{ er K-estimatoren for } d. \tag{48}$$

K-estimatoren for σ_d^2 er gitt ved:

$$S_d^2 = \sum_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{w} q_{ij} (\hat{d}_{ij} - \hat{d}^*)^2 = \sum_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{w} q_{ij} \hat{d}_{ij}^2 - \hat{d}^{*2} \tag{49}$$

hvor

$$\hat{d}_{ij} = \left. \frac{\partial d}{\partial p_{ij}} \right|_{p=q}$$

$$\hat{d}^* = \sum_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{w} \hat{d}_{ij} q_{ij} \quad .$$

Fra teorem 1 ser man at $\sqrt{n}(\hat{d}-d) \overset{D}{\rightarrow} N(0,\sigma_d)$. σ_d^2 kalles derfor den asymptotiske variansen til $\sqrt{n}\hat{d}$.

Teorem 1 gir også at

$$\sqrt{n}\, \frac{(\hat{d}-d)}{S_d} \overset{D}{\rightarrow} N(0,1) \quad . \tag{50}$$

Denne asymptotiske egenskapen vil bli anvendt til testing og intervall-estimering av de avhengighetsmål som vi skal diskutere.

III. 2. En innledende diskusjon om avhengighetsmål.

Begrepet avhengighet mellom to faktorer vil ofte være vagt og upresist. Som regel er det, imidlertid, spesielle trekk ved avhengigheten som vi er interessert i å måle i en gitt situasjon. Disse relevante avhengighetstrekk vil ofte kunne spesifiseres som en del av formålet ved en undersøkelse. Et avhengighetsmål bør derfor konstrueres ut fra en relevant modell for den gitte situasjonen, slik at det gir mest mulig informasjon om de interessante avhengighetstrekkene, i den grad disse er tilstede. Dvs. for en gitt situasjon vil vi at avhengighetsmålet er slik at det måler de avhengighetstrekk som er interessante i denne situasjonen. Vi skjerper altså definisjonen av avhengighet ved konstruksjon av relevante passende mål.

Dersom flere mål er konstruert for en gitt situasjon, bør man velge det mål som man mener gir klarest uttrykk for de relevante avhengighetstrekk.

Dessuten bør målene ha en enkel operasjonell (sannsynlighetsteoretisk) tolkning, slik at det bl.a. er meningsfylt å sammenligne verdiene av et mål for flere tabeller.

Ved valg av avhengighetsmål har vi funnet det naturlig å skille mellom følgende fem situasjoner.

1) *Ordnet situasjon.*

Det eksisterer for hver faktor en underliggende ordning mellom kjennetegnene. Dvs. at vi har en ordinal skala for de variable Y og Z. La f.eks. faktor A være utdanningsnivå og B inntektsnivå.

2) *Uordnet symmetrisk situasjon.*

Det foreligger ingen naturlig eller relevant ordning mellom kjennetegnene. Y og Z-verdiene brukes bare for å identifisere kjennetegnene; dvs. det er en nominal skala. Dessuten opptrer faktorene symmetrisk; de er begge av like stor interesse.

3) *Uordnet asymmetrisk situasjon.*

Denne situasjonen forekommer når en av faktorene, la oss si B, er av primær interesse i forhold til den andre, og vi har en nominal skala for Y og Z. Det kan f.eks. være at faktoren A "går foran" B kronologisk eller årsaksmessig. Et eksempel kan være A: utdanning og B: yrke, eller A: inntekt, B: stillingstagen til et bestemt problem.

4) *Pålitelighets-situasjonen.*

Denne situasjonen opptrer når v=w, og A og B antar samme kjennetegn, men refererer seg til forskjellige metoder. La f.eks. A og B være to psykologiske tester som klassifiserer mentalt syke individer etter hvilken sykdom de lider av.

5) *Blandet situasjon.*

Den ene faktors kjennetegn innehar en naturlig, relevant ordning, den andre ikke. Dvs. en av de variable (Y,Z) har nominalnivå, den andre ordinalnivå. Et eksempel på denne situasjonen kan være A: inntektsnivå og B: kommuneinndeling.

Utenom disse fem situasjonene vil vi behandle 2 × 2-tabellen for seg. De fleste målene som blir diskutert i forbindelse med situasjonene 1) til og med 4) finner man i [6] og [7].

Tilfellene 1) og 2) blir behandlet grundigere enn de andre, siden det vel er disse som forekommer hyppigst. Spesielt vil den ordnete situasjonen opptre ofte. Målene som blir diskutert der vil alle variere i intervallet [-1,1]. Som mål for grad av avhengighet i den ordnete situasjonen, kan man bruke kvadratet av disse målene.

I alle situasjoner, unntatt 4) og 5) vises det hvordan n.u. hypotesen kan bestemmes ut fra de forskjellige foreslåtte avhengighetsmål. For hvert valg av mål utledes estimatoren S_d^2. N-testen for n.u. hypotesen følger da fra II.2. (i), og fra II.4 kan man angi de tosidige og ensidige konfidens-intervallene (42) og (43). Anvendelse av N_3-prosedyren i II.3 følger også direkte når S_d^2 er kjent.

III.3. Ordnet situasjon.

III.3. (i) Tre ordinalinvariante mål.

Situasjonen er at det foreligger en relevant ordning mellom kjennetegnene innen begge faktorer. La oss først gi en definisjon av ordinalinvariante mål.

Definisjon 8. Et mål g kalles ordinalinvariant hvis det er uforandret under like typer av monotone transformasjoner av Y og Z, og hvis det forandrer fortegn når transformasjonene er av ulike typer. Dvs. at $g(Y,Z) = g(f(Y),h(Z))$, hvis f og h begge er strengt økende, eller begge er strengt avtagende funksjoner, og $g(Y,Z) = -g(f(Y),h(Z))$ hvis den ene funksjonen er strengt avtagende, og den andre er strengt økende.

Siden Y og Z måles på ordinalskala, slik at rekkefølgen av deres verdier, men ikke avstanden mellom verdiene, har mening, vil vi kreve at et mål for denne situasjonen er ordinalinvariant. Dessuten bør målet g tilfredsstille to krav:

(i) $-1 \leq g \leq 1$

(ii) A,B eksakt uavhengige $\Rightarrow g = 0$.

Hvis $g \in [-M,M]$, vil $g/M \in [-1,1]$, slik at hvis variasjonsområdet til g er begrenset, symmetrisk om origo, kan vi alltid få (i) oppfylt ved å normere målet.

Vi vil beskrive tre slike ordinalinvariante mål som alle er modifikasjoner av en grunnleggende størrelse. De betegnes med

1) γ , foreslått av Goodman & Kruskal ([6], s. 748).

2) τ_b, Kendalls rangkorrelasjons-koeffisient modifisert til kontingenstabeller.

3) τ_c, foreslått av Stuart, [20].

Målet γ er også diskutert i [11]. Vi vil senere begrunne hvorfor γ er det mest passende mål av de tre. Asymptotiske egenskaper ved fordelingen til K-estimatoren $\hat{\gamma}$ for γ er gitt i [8]. Senere vil vi se at $\hat{\gamma}$'s asymptotiske egenskaper følger fra teorem 1. K-estimatoren $\hat{\tau}_b$ for τ_b er diskutert av Kendall, [10]. $\hat{\tau}_b$ er et spesialtilfelle av en generell empirisk korrelasjons-koeffisient for (Y,Z) (se [10], s. 19).

Alle målene, men spesielt γ, kan gis en enkel sannsynlighetsteoretisk tolkning. La oss først betrakte γ.

III.3. (ii) Konstruksjon av et naturlig mål, γ.

La (Y_1,Z_1) og (Y_2,Z_2) være to stokastisk uavhengige variable med samme fordeling som (Y,Z). Vi sier (Y_1,Z_1) og (Y_2,Z_2) er overensstemmende (eng.: concordant) hvis Y_1 og Y_2 avviker med samme fortegn som Z_1 og Z_2, dvs. hvis $(Y_1-Y_2)(Z_1-Z_2) > 0$. Tilsvarende sier vi at de variable er uoverensstemmende (eng.: discordant) hvis Y-ene og Z-ene avviker med forskjellig fortegn; dvs. hvis $(Y_1-Y_2)(Z_1-Z_2) < 0$.

γ er definert ved:

$$\gamma = P\{(Y_1-Y_2)(Z_1-Z_2) > 0 | Y_1 \neq Y_2 \cap Z_1 \neq Z_2\}$$
$$- P\{(Y_1-Y_2)(Z_1-Z_2) < 0 | Y_1 \neq Y_2 \cap Z_1 \neq Z_2\}.$$

Det ses umiddelbart at γ er ordinalinvariant.

La $\pi_t = P(Y_1=Y_2 \cup Z_1=Z_2)$.

$$\pi_s = P\{(Y_1-Y_2)(Z_1-Z_2) > 0\}.$$

$$\pi_d = P\{(Y_1-Y_2)(Z_1-Z_2) < 0\}.$$

Dvs. at π_s er sannsynligheten for at de variable er overensstemmende, og π_d er sannsynligheten for at de er uoverensstemmende.

I denne situasjonen finner vi det naturlig å utvide definisjonen av eksakt uavhengighet mellom faktorene til:

Definisjon 9. To faktorer A og B sies å være ordnings-uavhengige (o.u.) hvis $\pi_s = \pi_d$.

Det sees at γ kan uttrykkes på følgende form:

$$\gamma = \frac{\pi_s - \pi_d}{1-\pi_t} \quad . \tag{51}$$

Dessuten, siden $\pi_t + \pi_s + \pi_d = 1$: $\gamma = (\pi_s - \pi_d)/(\pi_s + \pi_d)$.

Herav sees at $\gamma \in [-1,1]$, slik at (ii) er tilfredsstilt.

Man finner at

$$\pi_t = \sum_{i=1}^{v} p_{i.}^2 + \sum_{j=1}^{w} p_{.j}^2 - \sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{w} p_{ij}^2 .$$

$$\pi_s = 2 \sum_{i=1}^{v-1}\sum_{j=1}^{w-1} p_{ij}\{\sum_{i'>i}\sum_{j'>j} p_{i'j'}\}. \tag{52}$$

$$\pi_d = 2 \sum_{i=1}^{v-1}\sum_{j=2}^{w} p_{ij}\{\sum_{i'>i}\sum_{j'<j} p_{i'j'}\}.$$

Videre kan det vises at A, B eksakt uavhengige medfører at $\pi_s = \pi_d$, slik at definisjonen 9 faktisk er en utvidelse av eksakt uavhengighet.

Fra (51) has at: $\gamma = 0 \Leftrightarrow$ A,B o.u. slik at γ dermed tilfredsstiller (i) og (ii). Dessuten has (se [6]) at γ har følgende egenskaper:

(iii) A, B eksakt uavhengige $\Rightarrow \gamma = 0$, men det omvendte behøver ikke holde, unntagen i 2×2-tilfellet.

(iv) γ er veldefinert såfremt ikke alle positive cellesannsynligheter er konsentrert i en enkel rad eller kolonne.

I denne situasjonen vil vi med nesten uavhengighet mene at faktorene A og B er nesten ordnings-uavhengige, i den betydning at π_s og π_d er tilnærmet like.

I 2×2-tabellen reduserer målet seg til

$$\gamma = \frac{p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21}}{p_{11}p_{22}+p_{12}p_{21}} = \frac{\Delta-1}{\Delta+1} \tag{53}$$

hvor $\Delta = \frac{p_{11}p_{22}}{p_{12}p_{21}}$ er kryssprodukt-forholdet. Avhengighetsmål i 2×2-tabellen kommer vi tilbake til i III.8.

III.3. (iii) To alternative mål, τ_b og τ_c.

La oss først betrakte følgende situasjon.

La U,V være kontinuerlige stokastiske variable. Kendalls rangkorrelasjons-koeffisient τ for (U,V) er definert ved:

$$\tau = P\{(U_1-U_2)(V_1-V_2) > 0\} - P\{(U_1-U_2)(V_1-V_2) < 0\} \tag{54}$$

hvor (U_1,V_1) og (U_2,V_2) er to stokastisk uavhengige variable med samme fordeling som (U,V) ([11], s. 822). τ kan betraktes som korrelasjonskoeffisienten mellom fortegnene til U_1-U_2 og V_1-V_2.

La $(u_1,v_1),\ldots,(u_n,v_n)$ være n observasjoner av (U,V). Vi sier at det er ingen sammenfallende verdier hvis $u_i \neq u_j$ og $v_i \neq v_j$ for $i \neq j$, $i=1,\ldots,n$ og $j=1,\ldots,n$. Det engelske uttrykket for sammenfallende verdier er "ties" som vi vil anvende heretter. I en kontingenstabell vil det altså foreligge ties hvis minst to observasjoner faller i samme rad eller kolonne, noe som alltid vil skje dersom $n > \min(v,w)$.

I tilfellet med ingen ties ser man at γ reduseres til τ. M.a.o. γ er en modifikasjon av τ til situasjonen med ties. Nå vil vi betrakte to andre modifikasjoner av τ til tilfellet med ties.

La situasjonen være som i III.3. (ii).

Kendalls rangkorrelasjonskoeffisient for kontingenstabeller er definert ved (vår definisjon):

$$\tau_b = \frac{\pi_s - \pi_d}{\sqrt{P(Y_1 \neq Y_2)P(Z_1 \neq Z_2)}} \;. \tag{55}$$

(Legg merke til at $\gamma = (\pi_s-\pi_d)/P(Y_1 \neq Y_2 \cap Z_1 \neq Z_2)$.)

La $\pi_y = P(Y_1 \neq Y_2)$ og $\pi_z = P(Z_1 \neq Z_2)$.

$$\begin{aligned} \pi_y &= 1 - \sum_{i=1}^{v} p_{i.}^2 \;. \\ \pi_z &= 1 - \sum_{j=1}^{w} p_{.j}^2 \;. \end{aligned} \tag{56}$$

I 2×2-tilfellet er

$$\tau_b = \frac{p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21}}{\sqrt{p_{1.}p_{2.}p_{.1}p_{.2}}} \tag{57}$$

τ_b tilfredsstiller (i) og (ii) i III.3. (i), siden $\tau_b=0 \Leftrightarrow \pi_s=\pi_d$. Dessuten har τ_b følgende egenskaper:

(iii) τ_b er veldefinert, såfremt ikke alle positive cellesannsynligheter er konsentrert i en enkel rad eller kolonne.

(iv) τ_b er ordinalinvariant.

Angående (i) bør nevnes at grensene ±1 aldri kan oppnås, unntagen i en v×v-tabell hvor $\sum_{i=1}^{v} p_{ii} = 1$. Det er også verdt å merke seg at τ_b^2 kan betraktes som en generalisering av $\beta = \frac{(p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21})^2}{p_{1.}p_{2.}p_{.1}p_{.2}}$ til en v×w-ordnet situasjon, mens det tradisjonelle kji-kvadratmålet

$$\phi^2 = \sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{w} \frac{(p_{ij}-p_{i.}p_{.j})^2}{p_{i.}p_{.j}} \tag{58}$$

er en generalisering av β til situasjonen med ingen relevant ordning For andre tradisjonelle mål i denne situasjonen henviser vi til III.4. (v).

Det tredje mål τ_c er definert ved:

$$\tau_c = \frac{\pi_s-\pi_d}{(m-1)/m} \tag{59}$$

hvor m = min (v,w).

Normeringsfaktoren $m/(m-1)$ er en følge av lemma 5.

LEMMA 5. $-\frac{m-1}{m} \le \pi_s - \pi_d \le \frac{m-1}{m}$. *Grensene oppnås dersom alle cellesannsynlighetene er lik 0 utenfor en lengste diagonal i tabellen, og lik* $\frac{1}{m}$ *i diagonalen.*

Lemma 5 gir at (i) er oppfylt, hvor nå grensene -1 og +1 også kan oppnås når $v \neq w$. Egenskap (ii) holder også, og τ_c er dessuten ordinalinvariant og alltid veldefinert. I 2×2-tilfellet er $\tau_c = 4(p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21})$.

K-estimatoren $\hat{\tau}_b$ for τ_b er gitt ved:

$$\hat{\tau}_b = \frac{P_s-P_d}{\sqrt{P_y \cdot P_z}} \tag{60}$$

hvor

$$
\begin{aligned}
P_y &= 1 - \sum_{i=1}^{v} q_{i.}^2 \\
P_z &= 1 - \sum_{j=1}^{w} q_{.j}^2 \\
P_s &= 2 \sum_{i=1}^{v-1} \sum_{j=1}^{w-1} q_{ij} \{ \sum_{i'>i} \sum_{j'>j} q_{i'j'} \} \\
P_d &= 2 \sum_{i=1}^{v-1} \sum_{j=2}^{w} q_{ij} \{ \sum_{i'>i} \sum_{j'<j} q_{i'j'} \}
\end{aligned}
\tag{61}
$$

$\hat{\tau}_b$ kan betraktes som et spesialtilfelle av en generalisert empirisk korrelasjons koeffisient (se [10], s. 19). **Vi** vil kort gjengi beskrivelsen her. $(y_1, z_1), \ldots, (y_n, z_n)$ er de n uavhengige observasjoner som tas. Til hvert par $\{(y_i, z_i), (y_j, z_j)\}$ tildeles en Y-score a_{ij} slik at $a_{ij} = -a_{ji}$, og en Z-score b_{ij} s.a. $b_{ij} = -b_{ji}$ ($\Rightarrow a_{ii} = b_{ii} = 0$). Den generaliserte empiriske korrelasjonskoeffisienten er definert ved:

$$
\Gamma = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2}}
\tag{62}
$$

F.eks. fås den vanlige empiriske (produkt)korrelasjonskoeffisienten

$$
\frac{\sum_i (y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z})}{\sqrt{\sum_i (y_i - \bar{y})^2 \cdot \sum_i (z_i - \bar{z})^2}}
$$

ved å sette $a_{ij} = y_j - y_i$ og $b_{ij} = z_j - z_i$.

Følgende resultat viser hvordan $\hat{\tau}_b$ er et spesialtilfelle av Γ.

LEMMA 6. La Y-scorene a_{ij} og Z-scorene b_{ij} være gitt ved:

$$
a_{ij} = \begin{cases} +1 & \textit{hvis} \quad y_i < y_j \\ 0 & \textit{hvis} \quad y_i = y_j \\ -1 & \textit{hvis} \quad y_i > y_j \end{cases}, \qquad
b_{ij} = \begin{cases} +1 & \textit{hvis} \quad z_i < z_j \\ 0 & \textit{hvis} \quad z_i = z_j \\ -1 & \textit{hvis} \quad z_i > z_j \end{cases}.
$$

Da er $\Gamma = \hat{\tau}_b$.

I tilfellet med ingen ties vil vi alltid ha a_{ij}, b_{ij} lik +1 eller -1 for $i \neq j$, og helt tilsvarende vil da $\Gamma = \hat{\tau}$ hvor $\hat{\tau}$ er K-estimatoren for τ, define ved (54). Dvs. at $\hat{\tau}_b$ er den naturlige modifikasjon av $\hat{\tau}$ basert på Γ.

III.3. (iv) En vurdering av målene γ, τ_b og τ_c.

Det første vi noterer oss er at alle tre målene er en modifikasjon av differensen $\pi_s - \pi_d$ til tilfellet med ties. Den naturligste modifikasjon er opplagt γ, hvor man ser på de betingede sannsynligheter gitt ingen ties. Både τ_b og τ_c synes å være noe kunstige modifikasjoner, da kanskje særlig τ_c som bare er en normering av $\pi_s - \pi_d$.

Det andre man bør merke seg (angående τ_b) er at opprinnelig var det den empiriske rangkorrelasjons-koeffisienten $\hat{\tau}$ som ble modifisert til $\hat{\tau}_b$, med utgangspunkt i den generaliserte empiriske korrelasjonskoeffisienten Γ gitt ved (62) (se [10] og [20]). Definisjonen (55) er vi kommet fram til ved å innsette sannsynlighetene p_{ij} istedenfor q_{ij} i $\hat{\tau}_b$. (τ_b er ikke nevnt i noen av de artiklene som vi gir referanser til.) Vi har dermed at mens γ er den naturlige modifikasjon av τ basert på $\pi_s - \pi_d$, så er $\hat{\tau}_b$ den naturlige modifikasjon av $\hat{\tau}$ basert på Γ. Det man er interessert i er parameteren. Det korrekte må derfor være å modifisere parameteren, og deretter se på problemet med estimering, ikke å gå den omvendte veien som Kendall gjorde med $\hat{\tau}$. Konklusjonen må derfor bli at γ er det mest naturlige og passende mål i den ordnete situasjonen. Testing av n.u. bør derfor baseres på γ^2. En n.u. hypotese basert på γ^2 bestemmes senere. (Som før nevnt anvendes γ^2 som mål for grad av avhengighet ved valg av γ som avhengighetsmål.) Som nevnt i III.1 antas at $p_{ij} > 0$ for $i=1,\dots,v$ og $j=1,\dots,w$ ved testing og estimering. Det vil da, som vist i II.2 (i), medføre (under 46b) at målene varierer i det åpne intervallet $\langle -1,1 \rangle$.

III.3. (v) Intervall-estimering av γ.

Vi følger nå notasjonen i Goodman & Kruskal ([8],s. 322) ved å la P_s og P_d være estimatorene for π_s og π_d gitt ved (61). La videre P_t være tilsvarende estimator for π_t, slik at vi dermed har:

$$P_s = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{v-1} \sum_{j=1}^{w-1} X_{ij} \{ \sum_{i'>i} \sum_{j'>j} X_{i'j'} \}$$

$$P_d = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{v-1} \sum_{j=2}^{w} X_{ij} \{ \sum_{i'>i} \sum_{j'<j} X_{i'j'} \} \tag{63}$$

$$P_t = \sum_{i=1}^{v} q_{i.}^2 + \sum_{j=1}^{w} q_{.j}^2 - \sum_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{w} q_{ij}^2 = \frac{1}{n^2} [\sum_{i=1}^{v} X_{i.}^2 + \sum_{j=1}^{w} X_{.j}^2 - \sum_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{w} X_{ij}^2]$$

La videre $P_s^* = n^2 P_s$, $P_d^* = n^2 P_d$ og $P_t^* = n^2 P_t$.
Anta at (Y_1,Z_1), (Y_2,Z_2) og (Y_3,Z_3) er tre stokastiske uavhengige variable med samme fordeling som (Y,Z). Definer følgende sannsynligheter:

$$\pi_{ss} = P\{(Y_1-Y_2)(Z_1-Z_2) > 0 \cap (Y_1-Y_3)(Z_1-Z_3) > 0\}$$

$$\pi_{sd} = P\{(Y_1-Y_2)(Z_1-Z_2) > 0 \cap (Y_1-Y_3)(Z_1-Z_3) < 0\} \tag{64}$$

$$\pi_{dd} = P\{(Y_1-Y_2)(Z_1-Z_2) < 0 \cap (Y_1-Y_3)(Z_1-Z_3) < 0\} .$$

La P_{ss}, P_{sd}, P_{dd} være følgende konsistente estimatorer for disse sannsynlighetene:

$$P_{ss} = \sum_i \sum_j q_{ij}\{\sum_{i'>i} \sum_{j'>j} q_{i'j'} + \sum_{i'<i} \sum_{j'<j} q_{i'j'}\}^2 =$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_i \sum_j X_{ij}\{\sum_{i'>i} \sum_{j'>j} X_{i'j'} + \sum_{i'<i} \sum_{j'<j} X_{i'j'}\}^2 =$$

$$P_{sd} = \sum_i \sum_j q_{ij}\{\sum_{i'>i} \sum_{j'>j} q_{i'j'} + \sum_{i'<i} \sum_{j'<j} q_{i'j'}\} \times$$

$$\{\sum_{i'>i} \sum_{j'<j} q_{i'j'} + \sum_{i'<i} \sum_{j'>j} q_{i'j'}\}$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_i \sum_j X_{ij}\{\sum_{i'>i} \sum_{j'>j} X_{i'j'} + \sum_{i'<i} \sum_{j'<j} X_{i'j'}\} \times \tag{65}$$

$$\{\sum_{i'>i} \sum_{j'<j} X_{i'j'} + \sum_{i'<i} \sum_{j'>j} X_{i'j'}\}$$

$$P_{dd} = \sum_i \sum_j q_{ij}\{\sum_{i'>i} \sum_{j'<j} q_{i'j'} + \sum_{i'<i} \sum_{j'>j} q_{i'j'}\}^2 =$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_i \sum_j X_{ij}\{\sum_{i'>i} \sum_{j'<j} X_{i'j'} + \sum_{i'<i} \sum_{j'>j} X_{i'j'}\}^2 .$$

La videre $P_{ss}^* = n^3 P_{ss}$, $P_{sd}^* = n^3 P_{sd}$ og $P_{dd}^* = n^3 P_{dd}$. π_{ss}, π_{sd} og π_{dd} kan uttrykkes på tilsvarende form i p_{ij} istedenfor q_{ij}. K-estimatoren $\hat{\gamma}$ for γ blir dermed:

$$\hat{\gamma} = \frac{P_s - P_d}{P_s + P_d} = \frac{P_s^* - P_d^*}{P_s^* + P_d^*} \quad . \tag{66}$$

Den asymptotiske varians σ_γ^2 og dens K-estimator S_γ^2 er gitt i følgende setning.

LEMMA 7.

$$\sigma_\gamma^2 = \frac{16}{(1-\pi_t)^4}\{\pi_s^2\,\pi_{dd} - 2\pi_s\pi_d\pi_{sd} + \pi_d^2\pi_{ss}\} \tag{67}$$

K-estimatoren kan uttrykkes på følgende alternative former:

1) $$S_\gamma^2 = \frac{16}{(1-P_t)^4}\{P_s^2P_{dd} - 2P_sP_dP_{sd} + P_d^2P_{ss}\} \tag{68}$$

2) $$S_\gamma^2 = \frac{n\cdot 16}{(n^2-P_t^*)^4}\{P_s^{*2}P_{dd}^* - 2P_s^*P_d^*P_{sd}^* + P_d^{*2}P_{ss}^*\} \tag{69}$$

Fra teorem 1 og lemma 7 fås nå:

$$\sqrt{n}\,\frac{\hat{\gamma}-\gamma}{S_\gamma} = \frac{(\hat{\gamma}-\gamma)(n^2-P_t^*)^2}{4\sqrt{P_s^{*2}P_{dd}^*-2P_s^*P_d^*P_{sd}^*+P_d^{*2}P_{ss}^*}} \xrightarrow{D} N(0,1). \tag{70}$$

Goodman & Kruskal ([8], s. 361) viser (70) ved å se direkte på $\hat{\gamma}$. Ved å anvende teorem 1 er det imidlertid tilstrekkelig å finne S_γ, gitt ved formel (49), slik at det blir atskillig lettere å nå fram til resultatet (70).

Et konfidensintervall for γ med asymptotisk konfidensgrad lik $1-\alpha$ er nå gitt ved:

$$\gamma \in \left\langle \max\left(-1, \hat{\gamma} - \frac{S_\gamma}{\sqrt{n}}\,x(\tfrac{\alpha}{2})\right),\ \min\left(1, \hat{\gamma} + \frac{S_\gamma}{\sqrt{n}}\,x(\tfrac{\alpha}{2})\right)\right\rangle. \tag{71}$$

Dersom $\hat{\gamma}=1$ eller -1 vil $S_\gamma^2 = 0$. Goodman & Kruskal foreslår da det degenererte intervallet $\gamma = 1$ (-1 dersom $\hat{\gamma}=-1$) når n er stor. Siden $\gamma \in \langle -1,1\rangle$ vil $\lim_{n\to\infty} P(\hat{\gamma}=\pm 1) = 0$. Dermed vil sannsynligheten for å få et degenerert konfidensintervall være meget liten for store n. For nærmere diskusjon se [8], s. 324.

III. 3. (vi) Valg av n.u. hypotese basert på γ. Estimering av γ^2.

Ved testing av n.u. vil hypotesen være at graden av avhengighet er mindre enn en viss øvre skranke, slik at "retningen" av avhengigheten er uvesentlig. Vi vil da som før nevnt bruke γ^2 som mål for grad av avhengighet. Et kriterium for n.u. er gitt ved:

$$-\varepsilon \le \gamma \le \varepsilon. \tag{72}$$

Valg av ε må nødvendigvis bli noe vilkårlig, siden begrepet nesten uavhengighet vanskelig kan gis en realistisk presis definisjon. Nå er, imidlertid, γ en differens mellom to (betingede) sannsynligheter. Et rimelig valg av ε vil derfor være av størrelsesorden 0.01-0.10. Det bør også bemerkes at ε-valget kan bero på den gitte situasjonen som foreligger. Dersom man erfaringsmessig vet at faktorene "har" en viss grad av avhengighet, bør muligens ε velges noe større enn hvis man a priori vet at faktorene kan være omtrent uavhengige.

Hypotesen om n.u. kan dermed formuleres slik:

$$H^{*} : \gamma^2 \leq c \tag{73}$$

hvor c er av størrelsesorden 0.0001-0.01.

Uten videre ser man at den asymptotiske varians til $\hat{\gamma}^2$ er lik $4\gamma^2 \cdot \sigma_\gamma^2$, og dens K-estimator er lik $4\hat{\gamma}^2 S_\gamma^2$. Dette følger av at $\frac{\partial\gamma^2}{\partial p_{ij}} = 2\gamma \cdot \frac{\partial\gamma}{\partial p_{ij}}$.

Herav:

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\gamma}^2-\gamma^2)}{2|\hat{\gamma}|S_\gamma} \xrightarrow{D} N(0,1) \quad \left(\text{eller: } \frac{\sqrt{n}(\hat{\gamma}+\gamma)(\hat{\gamma}-\gamma)}{2|\hat{\gamma}|S_\gamma} \xrightarrow{D} N(0,1)\right).$$

N-testen for H^{*}: Forkast H^{*} hvis

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\gamma}^2-\varepsilon^2)}{2|\hat{\gamma}|S_\gamma} > x(\alpha) \qquad \left(\text{eller: } \frac{\sqrt{n}(\hat{\gamma}+\varepsilon)(\hat{\gamma}-\varepsilon)}{2|\hat{\gamma}|S_\gamma} > x(\alpha)\right). \tag{74}$$

Et tosidig konfidensintervall for γ^2 (fra (42)):

$$\gamma^2 \in \left\langle \max\left(0, \hat{\gamma}^2 - \frac{2|\hat{\gamma}|S_\gamma}{\sqrt{n}} x(\tfrac{\alpha}{2})\right), \min\left(1, \hat{\gamma}^2 + \frac{2|\hat{\gamma}|S_\gamma}{\sqrt{n}} x(\tfrac{\alpha}{2})\right)\right\rangle \tag{75}$$

Fra (43) har vi et ensidig intervall for γ^2:

$$\gamma^2 \in \left\langle \max\left(0, \hat{\gamma}^2 - \frac{2|\hat{\gamma}|S_\gamma}{\sqrt{n}} x(\alpha)\right), 1\right\rangle . \tag{76}$$

Som nevnt i II.4 vil $\hat{\gamma}^2 - \frac{2|\hat{\gamma}|S}{\sqrt{n}} x(\alpha)$ være den maksimale c slik at hypotesen: $\gamma^2 \leq c$ blir forkastet. Intervallet (76) sier derfor noe mer enn resultatet av testen (74) om hvor sterk graden av avhengighet er.

Ved beregning av testobservatoren i (74) er det vel enklest å bruke formel (69) for S_γ^2. I [8] blir det vist at

$$\sigma_\gamma^2 \leq \frac{2(1-\gamma^2)}{1-\pi_t} . \tag{77}$$

Ved å bruke estimatoren $\frac{2(1-\hat{\gamma}^2)}{1-P_t}$ for øvre grense i (77), istedenfor S_γ^2 i (74) får man en enkel utregning for testobservatoren. Til gjengjeld vil testen bli mer konservativ, dvs. det asymptotiske nivå vil bli $\leq \alpha$. Ved å bruke $\frac{2(1-\hat{\gamma}^2)}{1-P_t}$ istedenfor S_γ^2 i (75) og (76) vil tilsvarende den asymptotiske konfidensgrad bli $\geq 1-\alpha$.

Goodman & Kruskal, [8], behandler nærmere bruken av (77) til konstruksjon av konfidensintervall for γ. (Legg merke til at ved å ta utgangspunkt i (71) kan vi konstruere et annet intervall for γ^2. Hvis grensene i (71) har forskjellig fortegn vil dette intervallet bli større enn (75)).

III. 3. (vii) Konfidensintervaller for τ_b *og* τ_c.

K-estimatorene S_b^2 og S_c^2 for de asymptotiske variansene σ_b^2 og σ_c^2 til henholdsvis $\sqrt{n}\hat{\tau}_b$ og $\sqrt{n}\hat{\tau}_c$ er gitt i nedenstående resultat.

LEMMA 8.

$$S_b^2 = \frac{1}{(P_zP_y)^3}\{4P_y^2P_z^2(P_{ss}+P_{dd}-2P_{sd})+(P_s-P_d)^2(P_z^2\sum_{i=1}^{v}q_{i.}^3+ \\ +P_y^2\sum_{j=1}^{w}q_{.j}^3+2P_yP_z\sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{w}q_{ij}q_{i.}q_{.j}) + \\ +4P_yP_z(P_s-P_d)(P_z\sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{w}q_{ij}q_{i.}(\hat{\alpha}_{ij}-\hat{\beta}_{ij}) + \\ +P_y\sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{w}q_{ij}q_{.j}(\hat{\alpha}_{ij}-\hat{\beta}_{ij})) - (P_s-P_d)^2(P_y+P_z)^2\}. \tag{78}$$

hvor

$$\hat{\alpha}_{ij} = \sum_{i'>i}\sum_{j'>j}q_{i'j'} + \sum_{i'<i}\sum_{j'<j}q_{i'j'}.$$

$$\hat{\beta}_{ij} = \sum_{i'>i}\sum_{j'<j}q_{i'j'} + \sum_{i'<i}\sum_{j'>j}q_{i'j'}.$$

$$S_c^2 = \frac{4m^2}{(m-1)^2}\{P_{ss}+P_{dd}-2P_{sd}-(P_s-P_d)^2\}. \tag{79}$$

Konfidensintervaller med asymptotisk konfidensgrad lik $1-\alpha$ er dermed gitt ved:

$$\tau_b \in \langle \max\,(-1,\hat{\tau}_b - \frac{S_b}{\sqrt{n}}\,x(\frac{\alpha}{2})),\ \min\,(1,\hat{\tau}_b + \frac{S_b}{\sqrt{n}}\,x(\frac{\alpha}{2}))\rangle. \tag{80}$$

$$\tau_c \in \langle \max\,(-1,\hat{\tau}_c - \frac{S_c}{\sqrt{n}}\,x(\frac{\alpha}{2})),\ \min\,(1,\hat{\tau}_c + \frac{S_c}{\sqrt{n}}\,x(\frac{\alpha}{2}))\rangle. \tag{81}$$

Kruskal, [11], nevner et fjerde mål ρ_s, for avhengighet i denne situasjonen. Det har imidlertid den uheldige egenskap at eksakt uavhengighet mellom A og B ikke nødvendigvis medfører at $\rho_s = 0$. Ved en forandring av definisjonen av målet får det, imidlertid denne egenskapen. Vi skal ikke beskrive dette målet, men det er klart at ved å anvende teorem 1 får vi at $\sqrt{n}\,\frac{(\hat{\rho}_s - \rho_s)}{S_\rho}$ vil være asymptotisk N(0,1), hvis betingelsen (46b) er oppfylt. ((46a) holder). Her er $\hat{\rho}_s$ K-estimator for ρ_s, og S_ρ^2 K-estimator for den asymptotiske varians til $\sqrt{n}\hat{\rho}_s$.

Ingen av de foreslåtte mål i den ordnete situasjonen er invariante under permutasjon av rader eller kolonner (av celle-sannsynligheter) i tabellen, naturlig nok. I den neste situasjonen vi skal betrakte vil målene være invariante under slike permutasjoner.

III.4. Uordnet symmetrisk situasjon.

To avhengighetsmål, λ og η, foreslått av Goodman & Kruskal, [6] og [7], vil bli behandlet. Dessuten vil vi liste opp noen tradisjonelle avhengighetsmål, som imidlertid, ikke kan gis noen operasjonell tolkning. Til slutt i dette kapitlet angis konfidensintervaller for størrelsene $\max_{i,j} |p_{ij} - p_{i.}\,p_{.j}|$ og $\max_{i,j} |\frac{p_{ij}}{p_{i.}} - p_{.j}|$.

III.4. (i) En symmetrisk prediksjonsmodell.

Målene λ og η vil være enkle funksjoner av feilsannsynligheter innen en viss prediksjonsmodell, som vil bli beskrevet. For at prediksjonsmodellen skal ha mening, vil det antas at celle-sannsynlighetene p_{ij} er kjente ved konstruksjon av målene λ og η. De to målene er samme funksjon av sannsynligheter for feilprediksjoner, basert på to forskjellige prediksjonsmetoder. Den symmetriske prediksjonsmodell målene er konstruert ut fra er følgende (se [6], s. 743):

I et gitt forsøk skal med sannsynlighet 0.5 B's kjennetegn predikeres, og med sannsynlighet 0.5 A's kjennetegn predikeres. (Dvs. enten A eller B's kjennetegn skal forutsies, hver faktor med sannsynlighet lik 0.5 for å bli trukket ut til prediksjon). Dersom B blir trukket ut, skal prediksjonen foretas på grunnlag av

(1) Ingen informasjon, og

(2) Gitt kjennetegn til A.

Tilsvarende dersom A skal predikeres.

III.4. (ii) Målene λ og η basert på henholdsvis optimal og proporsjonal prediksjon.

Goodman & Kruskal foreslår to alternative prediksjonsmetoder.

a) Optimal prediksjon.

Dersom B blir trukket ut: Predikerer i tilfelle (1) den B_j med $p_{.j} = \max_{j'} p_{.j'}$, og i tilfelle (2) gitt A_i: Predikerer den B_j med $p_{ij} = \max_{j'} p_{ij'}$. Tilsvarende dersom A blir trukket ut. La nå

Q_1 = P(Riktig optimal prediksjon i tilfelle (1))

og Q_2 = P(Riktig optimal prediksjon i tilfelle (2)).

b) Proporsjonal prediksjon.

Dersom B blir trukket ut. Predikerer i tilfelle (1) B_j med sannsynlighet $p_{.j}$, for $j=1,\ldots,w$, og i tilfelle (2) gitt A_i: Predikerer B_j med sannsynlighet $p_{ij}/p_{i.}$ for $j=1,\ldots,w$. Tilsvarende hvis A blir trukket ut til prediksjon. La

P_1 = P (Riktig proporsjonal prediksjon i tilfelle (1))

og P_2 = P (Riktig proporsjonal prediksjon i tilfelle (2)).

Målene λ og η defineres nå slik:

$$\lambda = \frac{(1-Q_1)-(1-Q_2)}{1-Q_1} = \frac{Q_2-Q_1}{1-Q_1}. \tag{82}$$

$$\eta = \frac{(1-P_1)-(1-P_2)}{1-P_1} = \frac{P_2-P_1}{1-P_1}. \tag{83}$$

Man ser at λ og η begge er relativ minsking i sannsynlighet for feilprediksjon fra ukjent til kjent kjennetegn for den faktor som ikke predikeres.

Nå er $Q_i = \frac{1}{2}\{$P (Riktig optimal prediksjon av B's kjennetegn i tilfelle (i)),

+ P (Riktig optimal prediksjon av A's kjennetegn i tilfelle (i)$\}$,

og tilsvarende for P_i. Vi finner følgende uttrykk for Q_i og P_i, λ og η.

$$Q_1 = \frac{1}{2}(p_{.m} + p_{m.}) . \tag{84}$$

$$Q_2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{v} p_{im} + \sum_{j=1}^{w} p_{mj}\right). \tag{85}$$

hvor $p_{.m} = \max_j p_{.j}$, $p_{m.} = \max_i p_{i.}$, $p_{im} = \max_{j'} p_{ij'}$ og $p_{mj} = \max_{i'} p_{i'j}$.

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{v} p_{im} + \sum_{j=1}^{w} p_{mj} - p_{.m} - p_{m.}}{2 - p_{.m} - p_{m.}} \tag{86}$$

$$P_1 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{v} p_{i.}^2 + \sum_{j=1}^{w} p_{.j}^2\right) . \tag{87}$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{w} p_{ij}^2 \left(\frac{1}{p_{i.}} + \frac{1}{p_{.j}}\right). \tag{88}$$

Det sees lett at η kan uttrykkes på følgende form:

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{w} (p_{ij} - p_{i.}p_{.j})^2 \left(\frac{1}{p_{i.}} + \frac{1}{p_{.j}}\right)}{2 - \sum_{i=1}^{v} p_{i.}^2 - \sum_{j=1}^{w} p_{.j}^2} . \tag{89}$$

Noen egenskaper ved λ:

(i) λ er veldefinert, unntagen hvis en $p_{ij} = 1$.

(ii) $0 \leq \lambda \leq 1$.

(iii) A, B eksakt uavhengige $\Rightarrow \lambda = 0$.

(iv) λ er invariant ved permutasjon av rader og kolonner (av cellesannsynlighetene) i kontingenstabellen.

Noen egenskaper ved η:

(i) η er veldefinert, unntagen hvis en $p_{ij} = 1$.

(ii) $0 \leq \eta \leq 1$.

(iii) A, B eksakt uavhengige $\Leftrightarrow \eta = 0$.

(iv) η er invariant ved permutasjon av rader og kolonner.

I 2×2-tilfellet er η lik β. Dvs. at η er lik kji-kvadratmålet ϕ^2 og τ_b^2 i 2×2-tabellen.

Hvilket av målene som passer best i en gitt situasjon vil bero på hvilken prediksjonsmetode som er den relevante i denne situasjonen. Vanligvis er det vel mest interessant å forutsi den mest sannsynlige Y eller Z-verdi, dvs. at optimal prediksjon er den mest relevante som regel. Man bør imidlertid merke seg at λ er et noe "grovere" mål enn η. Med det menes at dersom avhengigheten mellom A og B forandres lite, vil ikke nødvendigvis λ avsløre det. En ulempe ved λ er også at $\lambda = 0$ ikke nødvendigvis medfører eksakt uavhengighet. Spesielt ved valg av n.u. hypotese er dette en uheldig egenskap. Det ser derfor ut til at η er å foretrekke som basis for en n.u. hypotese.

III.4. (iii) Intervallestimering av λ og η.

Siden $p_{ij} > 0$, pr. antagelse, vil λ og η være veldefinerte. Det sees lett at λ ikke har kontinuerlige partielle deriverte m.h.p. p_{ij}-ene. Derimot har λ selvfølgelig kontinuerlige partielle betraktet som funksjon av p_{im}, p_{mj}, $p_{.m}$ og $p_{m.}$ for $i=1,\dots,v$ og $j=1,\dots,w$. Dette kan utnyttes på tilsvarende måte. Goodman & Kruskal, [8], viser følgende resultat:

LEMMA 9. *La* $$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{v} q_{im} + \sum_{j=1}^{w} q_{mj} - q_{.m} - q_{m.}}{2 - q_{.m} - q_{m.}} = \frac{\sum_{i=1}^{v} X_{im} + \sum_{j=1}^{w} X_{mj} - X_{.m} - X_{m.}}{2n - X_{.m} - X_{m.}}$$

hvor $q_{im} = \max_{j'} q_{ij'}$, $q_{mj} = \max_{i'} q_{i'j}$, $q_{.m} = \max_{j} q_{.j}$, $q_{m.} = \max_{i} q_{i.}$.
$X_{im} = nq_{im}$, $X_{mj} = nq_{mj}$, $X_{.m} = nq_{.m}$, $X_{m.} = nq_{m}$. Da vil dersom $p_{mj}, p_{im}, p_{m.}$ og $p_{.m}$ er entydig definert og $\lambda \in \langle 0,1 \rangle$:

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\lambda}-\lambda)}{s_\lambda} \xrightarrow{D} N(0,1). \tag{90}$$

Her er estimatoren s_λ^2 for den asymptotiske varians til $\sqrt{n}\hat{\lambda}$ gitt ved:

$$s_\lambda^2 = \frac{1}{(2-U_0)^2}\{(2-U_0)(2-U_\Sigma)(U_0+U_\Sigma+4-2U_*)-2(2-U_0)^2(1-\Sigma^* q_{im})-2(2-U_\Sigma)^2(1-q_{**})\} \tag{91}$$

hvor

$$U_0 = q_{.m} + q_{m.}$$

$$U_\Sigma = \sum_{i=1}^{v} q_{im} + \sum_{j=1}^{w} q_{mj}$$

$$\Sigma^* q_{im} = \sum_i \sum_j q_{ij} \quad \text{over alle } (i,j) \text{ slik at } q_{ij} = q_{im} = q_{mj}$$

$$q_{**} = \text{den } q_{ij} \text{ hvor } q_{i.} = q_{m.} \text{ og } q_{.j} = q_{.m}$$

$$U_* = \sum_i{}^r q_{im} + \sum_j{}^c q_{mj} + q_{*m} + q_{m*} \, .$$

$\sum_i^r q_{im}$ betegner summen over q_{im} for de verdier av i slik at q_{im} er i samme kolonne som $q_{.m}$. $\sum_j^c q_{mj}$ er summen over de q_{mj} slik at q_{mj} er i samme rad som $q_{m.}$. q_{*m} er den q_{im} med $q_{i.}=q_{m.}$ og q_{m*} er den q_{mj} med $q_{.m}=q_{.m}$.

Ved å anvende teorem 1 vil et tilsvarende resultat holde for K-estimatoren $\hat{\eta}$ for η.

LEMMA 10.

$$\hat{P}_1 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{v} q_{i.}^2 + \sum_{j=1}^{w} q_{.j}^2\right) \quad \text{og} \quad \hat{P}_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{w} q_{ij}^2\left(\frac{1}{q_{i.}} + \frac{1}{q_{.j}}\right)$$

$$\hat{\eta} = \frac{\hat{P}_2 - \hat{P}_1}{1-\hat{P}_1}.$$

Da vil

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\eta}-\eta)}{S_\eta} \xrightarrow{D} N(0,1) \tag{92}$$

hvor

$$S_\eta^2 = \frac{1}{4(1-\hat{P}_1)^4}\Big\{\sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{w} q_{ij}\Big[2q_{ij}\Big(\frac{1}{q_{i.}} + \frac{1}{q_{.j}}\Big)(1-\hat{P}_1) - $$
$$- \hat{\gamma}_{ij}(1-\hat{P}_1) - 2(q_{i.}+q_{.j})(1-\hat{P}_2)\Big]^2 - 4[\hat{P}_2 - 2\hat{P}_1 + \hat{P}_1\hat{P}_2]^2\Big\}. \tag{93}$$

Her er $\hat{\gamma}_{ij} = \sum_{s=1}^{w} \frac{q_{is}^2}{q_{i.}^2} + \sum_{r=1}^{v} \frac{q_{rj}^2}{q_{.j}^2}$.

Tosidige konfidensintervaller for λ og η er gitt ved:

$$\lambda \in \left\langle \max\left(0, \hat{\lambda} - \frac{S_\lambda}{\sqrt{n}} x\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right), \min\left(1, \hat{\lambda} + \frac{S_\lambda}{\sqrt{n}} x\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\right\rangle \tag{94}$$

$$\eta \in \left\langle \max\left(0, \hat{\eta} - \frac{S_\eta}{\sqrt{n}} x\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right), \min\left(1, \hat{\eta} + \frac{S_\eta}{\sqrt{n}} x\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\right\rangle. \tag{95}$$

Ensidige konfidensintervaller:

$$\lambda \in \left\langle \max\left(0, \hat{\lambda} - \frac{S_\lambda}{\sqrt{n}} x(\alpha)\right), 1\right\rangle. \tag{96}$$

$$\eta \in \left\langle \max\left(0, \hat{\eta} - \frac{S_\eta}{\sqrt{n}} x(\alpha)\right), 1\right\rangle. \tag{97}$$

III.4. (iv) Valg av n.u. hypotese basert på η.

Hypotesene som betraktes er

$$H_1^*: \lambda \leq c_1 \tag{98}$$

$$H_2^*: \eta \leq c_2 \tag{99}$$

Fra lemma 9 og lemma 10 følger:

Forkast H_1^* hvis: $\sqrt{n}\,\dfrac{(\hat{\lambda}-c_1)}{s_\lambda} > x(\alpha)$.

Forkast H_2^* hvis: $\sqrt{n}\,\dfrac{(\hat{\eta}-c_2)}{s_\eta} > x(\alpha)$.

La oss anta at vi har valgt η som mål for grad av avhengighet. Vi ønsker å bestemme c_2 i (99) slik at H_2^* blir en n.u. hypotese. Vi ønsker dessuten at c_2 er uavhengig av dimensjonen $v\times w$ i tabellen. La oss derfor velge c_2 i 2×2-tabellen. Da er som før nevnt $\eta = \tau_b^2$. Et n.u. kriterium basert på τ_b er gitt ved:

$$-\delta \leq \tau_b \leq \delta \,. \tag{100}$$

Herav bestemmes $c_2 = \delta^2$.

For valg av δ kommer vi opp i tilsvarende problemer som i III.3 (vi), men som for ε i (72), synes det naturlig å velge en verdi av δ i størrelsesorden 0.01 til 0.10.

III.4. (v) Tradisjonelle avhengighetsmål.

De vanligste tradisjonelle mål for grad av avhengighet er basert på det allerede nevnte kji-kvadrat-målet:

a) $$\phi^2 = \sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{w}\frac{(p_{ij}-p_{i.}p_{.j})^2}{p_{i.}p_{.j}} = \sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{w}\frac{p_{ij}^2}{p_{i.}p_{.j}} - 1\,,$$

(også kalt "mean square contingency" i litteraturen).

Tre variasjoner av dette målet er nevnt i [6], s. 739, 740.

b) $K = \sqrt{\dfrac{\phi^2}{1+\phi^2}}$ (foreslått av K. Pearson).

c) $T = \sqrt{\dfrac{\phi^2}{\sqrt{(v-1)(w-1)}}}$ (foreslått av Tschuprow).

d) $C = \phi^2/\min\,(v-1,w-1)$ (foreslått av Cramér).

Man ser at $K, T, C \in [0,1]$ og at: A og B eksakt uavhengige $\Longleftrightarrow \phi^2 = K = T = C = 0$. Det er vanskelig å gi en sannsynlighetsteoretisk tolkning av disse målene. Mål basert på ϕ^2 er m.a.o. ikke særlig meningsfylte. Goodman & Kruskal, [6], gir en mer utfyllende diskusjon om slike mål uten tolkning. Ved å anvende (42) på ϕ^2, kan vi angi konfidensintervalller for alle målene i a)-d). La nå

$$\hat{\phi}^2 = \sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{w}\frac{(q_{ij}-q_{i.}q_{.j})^2}{q_{i.}q_{.j}} = \sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{w}\frac{X_{ij}^2}{X_{i.}X_{.j}} - 1, \tag{101}$$

og la videre σ_ϕ^2 være den asymptotiske varians til $\sqrt{n}\hat{\phi}^2$. S_ϕ^2 er K-estimatoren for σ_ϕ^2.

Da gjelder:

LEMMA 11.

$$S_\phi^2 = \sum_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{w} q_{ij}(2\hat{\alpha}_{ij}-\hat{\mu}_i-\hat{\beta}_j)^2 - \{\sum_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{w} q_{ij}(2\hat{\alpha}_{ij}-\hat{\mu}_i-\hat{\beta}_j)\}^2 \tag{102}$$

hvor

$$\hat{\alpha}_{ij} = \frac{1}{q_{i.}q_{.j}}(q_{ij}-q_{i.}q_{.j})$$

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{q_{i.}^2} \sum_{j=1}^{w} \frac{(q_{ij}-q_{i.}q_{.j})}{q_{.j}}$$

og

$$\hat{\beta}_j = \frac{1}{q_{.j}^2} \sum_{i=1}^{v} \frac{(q_{ij}-q_{i.}q_{.j})}{q_{i.}}.$$

Et konfidensintervall for ϕ^2 er nå gitt ved:

$$\phi^2 \in \langle \max(0, \hat{\phi}^2 - \frac{S_\phi}{\sqrt{n}} x(\tfrac{\alpha}{2})), \hat{\phi}^2 + \frac{S_\phi}{\sqrt{n}} x(\tfrac{\alpha}{2})\rangle \tag{103}$$

la nå $L_1 = \max(0, \hat{\phi}^2 - \frac{S_\phi}{\sqrt{n}} x(\frac{\alpha}{2}))$ og $L_2 = \hat{\phi}^2 + \frac{S_\phi}{\sqrt{n}} x(\frac{\alpha}{2})$. Konfidensintervaller for målene K, T, C er dermed følgende:

$$K \in \langle \{\frac{L_1}{1+L_1}\}^{\frac{1}{2}}, \{\frac{L_2}{1+L_2}\}^{\frac{1}{2}}\rangle$$

$$T \in \langle \{\frac{L_1}{\sqrt{(v-1)(w-1)}}\}^{\frac{1}{2}}, \min(1, \{\frac{L_2}{\sqrt{(v-1)(w-1)}}\}^{\frac{1}{2}})\rangle \tag{104}$$

$$C \in \langle \frac{L_1}{\min(v-1, w-1)}, \min(1, \frac{L_2}{\min(v-1, w-1)})\rangle.$$

Tilslutt vil vi nevne et mål foreslått av J. F. Steffensen i 1933 (nevnt i [7], s. 140).

$$\psi^2 = \sum_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{w} p_{ij} \frac{(p_{ij}-p_{i.}p_{.j})^2}{p_{i.}(1-p_{i.})p_{.j}(1-p_{.j})}.$$

Noen egenskaper:

(a): $\psi^2 = 0 \Longleftrightarrow$ A og B er eksakt uavhengige og (b): $0 \leq \psi^2 \leq 1$.

ψ^2 er et veiet gjennomsnitt (med p_{ij} som vekter) av alle 2×2 "mean square contingencies", dannet fra hver av de vw cellene og deres komplement.

ψ^2 har opplagt kontinuerlige partielle deriverte. La $\hat{\psi}^2$ være K-estimatoren for ψ^2, $\hat{\psi}^2 = \psi^2|_{p=q}$. Da vil

$$\sqrt{n}\,\frac{(\hat{\psi}^2-\psi^2)}{S_{\psi^2}} \xrightarrow{D} N(0,1) .$$

Herav kan vi konstruere konfidensintervaller og teste hypoteser om ψ^2. For andre avhengighetsmål henviser vi til [7].

I neste avsnitt skal vi betrakte intervall-estimering av to størrelser som ikke er særlig gode avhengighetsmål, (de er alt for grove) men som er greie å behandle, siden deres verdier er lette å tolke.

III.4. (vi) Konfidensintervaller for $\max_{i,j}|p_{ij}-p_{i.}p_{.j}|$ *og* $\max_{i,j}\left|\frac{p_{ij}}{p_{i.}} - p_{.j}\right|$.

$$\kappa_1 = \max_{i,j} |p_{ij} - p_{i.}p_{.j}| .$$

κ_1 er ikke deriverbar og vi kan derfor ikke anvende teorem 1 til å konstituere konfidensintervall for κ_1. Betrakt isteden

$$D(p) = \sum_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{w} (p_{ij}-p_{i.}p_{.j})^2 .$$

D har opplagt kontinuerlige partielle deriverte.

Vi vil anta at (46b) holder. Et konfidensintervall for D er dermed gitt ved:

$$D \in \left\langle \max\left(0, \hat{D} - \frac{S_D}{\sqrt{n}}\,x\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right),\ \hat{D} + \frac{S_D}{\sqrt{n}}\,x\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\rangle \tag{105}$$

hvor $\hat{D} = D(q)$ og S_D^2 er K-estimatoren for den asymptotiske varians til $\sqrt{n}\hat{D}$, gitt nedenfor.

LEMMA 12.

$$S_D^2 = 4\{ \sum_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{w} q_{ij}(q_{ij}-q_{i.}q_{.j}-\hat{\xi}_i-\hat{\nu}_j)^2 - $$
$$- [\sum_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{w} q_{ij}(q_{ij}-q_{i.}q_{.j}-\hat{\xi}_i-\hat{\nu}_j)]^2 \tag{106}$$

hvor

$$\hat{\xi}_i = \sum_{k=1}^{w} q_{.k}(q_{ik}-q_{i.}q_{.k}) \qquad \textit{for } i=1,\ldots,v$$

og

$$\hat{\nu}_j = \sum_{r=1}^{v} q_{r.}(q_{rj}-q_{r.}q_{.j}) \qquad \textit{for } j=1,\ldots,w.$$

Konfidensintervallet (105) for D kan nå anvendes til å konstruere et intervall for κ_1. La $C_1 = C_1(q)$ og $C_2 = C_2(q)$ være henholdsvis nedre og øvre grense i (105). Da vil følgende resultat holde.

LEMMA 13.

a) $v = w = 2$ *gir:* $C_1 < D < C_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{C_1} < \kappa_1 < \frac{1}{2}\sqrt{C_2}$

b) $v = 2$, $w > 2$ (*eller* $w=2$, $v>2$) *gir:* $C_1 < D < C_2 \Rightarrow \sqrt{\frac{C_1}{vw}} < \kappa_1 < \sqrt{\frac{C_2}{2}}$

c) $v > 2$, $w > 2$ *gir:* $C_1 < D < C_2 \Rightarrow \sqrt{\frac{C_1}{vw}} < \kappa_1 < \sqrt{C_2}$.

Konfidensintervaller for κ_1 i de tre forskjellige situasjonene i lemma 13 er dermed lik (siden $\kappa_1 \in [0,1]$):

a) $v = w = 2$

$$\kappa_1 \in \langle\{\max(0,\hat{\kappa}_1^2 - \frac{S_D}{4\sqrt{n}}\, x(\tfrac{\alpha}{2}))\}^{\frac{1}{2}},\ \min(1,\{\hat{\kappa}_1^2 + \frac{S_D}{4\sqrt{n}}\, x(\tfrac{\alpha}{2})\}^{\frac{1}{2}})\rangle \quad (107)$$

hvor $\hat{\kappa}_1^2 = (q_{11}q_{22}-q_{12}q_{21})^2$. Asymptotisk konfidensgrad er lik $1-\alpha$.

b) $v=2$, $w>2$, eller $v>2$, $w=2$

$$\kappa_1 \in \langle\{\max(0,\frac{\hat{D}}{vw} - \frac{S_D}{vw\sqrt{n}}\, x(\tfrac{\alpha}{2})\}^{\frac{1}{2}},\ \min(1,\{\tfrac{1}{2}\hat{D} + \frac{S_D}{2\sqrt{n}}\, x(\tfrac{\alpha}{2})\}^{\frac{1}{2}}\rangle. \quad (108)$$

Asymptotisk konfidensgrad er $\geq 1-\alpha$.

c) $v>2$, $w>2$

$$\kappa_1 \in \langle\{\max(0,\frac{\hat{D}}{vw} - \frac{S_D}{vw\sqrt{n}}\, x(\tfrac{\alpha}{2})\}^{\frac{1}{2}},\ \min(1,\{\hat{D} + \frac{S_D}{\sqrt{n}}\, x(\tfrac{\alpha}{2})\}^{\frac{1}{2}}\rangle. \quad (109)$$

Asymptotisk konfidensgrad er $\geq 1-\alpha$.

Man ser at i alle tre tilfellene så er nedre grense lik $(\frac{C_1}{vw})^{\frac{1}{2}}$. Øvre grense derimot blir, hvis den er mindre enn 1, i tilfelle a) lik $(\frac{C_1}{vw})^{\frac{1}{2}}$ i b) lik $(\frac{C_2}{2})^{\frac{1}{2}}$ og i c) lik $C_2^{\frac{1}{2}}$.

Ved konstruksjon av konfidensintervall for*)

$$\kappa_2 = \max_{i,j} \left| \frac{p_{ij}}{p_{i.}} - p_{.j} \right|$$

støter vi på samme problem som ved κ_1. Vi er ikke istand til å konstruere intervall for κ_2 basert direkte på $\hat{\kappa}_2 = \max_{i,j} |\frac{q_{ij}}{q_{i.}} - q_{.j}|$, på grunnlag av teorien utviklet i kapittel II. Derfor vil vi først konstruere et asymptotisk $(1-\alpha)$-konfidensintervall for

---

*) κ_2 er et mål som egentlig passer best i en asymmetrisk situasjon (med B som den primære faktoren).

$$E(p) = \sum_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{w} \left(\frac{p_{ij}}{p_{i.}} - p_{.j}\right)^2 .$$

Dette intervallet er gitt ved (se II.4, (42))

$$E \in \left\langle \max\left(0, \hat{E} - \frac{S_E}{\sqrt{n}} x\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right), \hat{E} + \frac{S_E}{\sqrt{n}} x\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\rangle \tag{110}$$

hvor $\hat{E} = E(q)$ og S_E^2 er K-estimatoren for den asymptotiske varians til $\sqrt{n}\hat{E}$ gitt i neste lemma.

LEMMA 14.

$$S_E^2 = 4\{\sum_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{w} q_{ij}\left(\frac{q_{ij}-q_{i.}q_{.j}}{q_{i.}^2} - \hat{E}_i - \hat{F}_j\right)^2 -$$

$$- \left[\sum_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{w} q_{ij}\left(\frac{q_{ij}-q_{i.}q_{.j}}{q_{i.}^2} - \hat{E}_i - \hat{F}_j\right)\right]^2\} \tag{111}$$

hvor

$$\hat{E}_i = q_{i.}^{-3} \sum_{k=1}^{w} (q_{ik}-q_{i.}q_{.k})q_{ik} \qquad \textit{for } i=1,\dots,v$$

og

$$\hat{F}_j = \sum_{r=1}^{v} \frac{q_{rj}-q_{r.}q_{.j}}{q_{r.}} \qquad \textit{for } j=1,\dots,w.$$

La nedre og øvre grense i (110) betegnes med $K_1 = K_1(q)$ og $K_2 = K_2(q)$.

LEMMA 15.

1) w=2 *gir:* $K_1 < E < K_2 \Rightarrow \sqrt{\frac{K_1}{vw}} < \kappa_2 < \sqrt{\frac{K_2}{2}}$

2) w>2 *gir:* : $K_1 < E < K_2 \Rightarrow \sqrt{\frac{K_1}{vw}} < \kappa_2 < \sqrt{K_2}$.

Konfidensintervaller for κ_2 med asymptotiske konfidensgrader $\geq 1-\alpha$ i de to tilfellene blir dermed (siden $\kappa_2 \in [0,1]$).

1) w=2

$$\kappa_2 \in \left\langle\{\max\left(0, \frac{\hat{E}}{vw} - \frac{S_E}{vw\sqrt{n}} x\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\}^{\frac{1}{2}}, \min\left(1, \{\frac{\hat{E}}{2} + \frac{S_E}{2\sqrt{n}} x\left(\frac{\alpha}{2}\right)\}^{\frac{1}{2}}\right)\right\rangle \tag{112}$$

2) w>2

$$\kappa_2 \in \left\langle\{\max\left(0, \frac{\hat{E}}{vw} - \frac{S_E}{vw\sqrt{n}} x\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\}^{\frac{1}{2}}, \min\left(1, \{\hat{E} + \frac{S_E}{\sqrt{n}} x\left(\frac{\alpha}{2}\right)\}^{\frac{1}{2}}\right\rangle \tag{113}$$

κ_2 er vel et mer anskuelig- gjørende mål enn κ_1 (bl.a. fordi man vanligvis tabellerer $q_{ij}/q_{i.}$ og betrakter differensen $q_{ij}/q_{i.}-q_{.j}$ ved vurdering av avhengighet i tabellen).

La oss nå betrakte situasjonen hvor en faktor er av primær interesse.

III.5. Uordnet asymmetrisk situasjon.

III.5. (i) En asymmetrisk prediksjonsmodell.

La oss anta at faktoren B er av primær interesse. To mål, λ_b og η_b, foreslått av Goodman & Kruskal, [6], skal betraktes. Målene λ_b og η_b svarer til λ og η i III.4, med den forskjell at de er konstruert ut fra en asymmetrisk prediksjonsmodell. For at prediksjonsmodellen skal ha mening, vil det, som i III.4 (i) antas at p_{ij}-ene er kjente ved konstruksjon av målene λ_b og η_b. Den asymmetriske modellen, gitt i [6], s. 741, er følgende:

> *I et gitt forsøk skal B's kjennetegn predikeres, gitt*
>
> *1) Ingen informasjon, og*
>
> *2) Gitt A's kjennetegn.*

Siden B er av primær interesse er de relevante avhengighetstrekk essensielt av typen: "Forskjellen" mellom riktig B-prediksjon gitt A og riktig B-prediksjon gitt ingen informasjon. Altså er den asymmetriske prediksjonsmodell beskrevet ovenfor en relevant modell å konstruere målene ut fra.

III.5. (ii) Målene λ_b og η_b basert på henholdsvis optimal og proporsjonal prediksjon.

Optimal og proporsjonal prediksjon for B er helt analogt med definisjonene a) og b) i III.4 (ii). Dvs.

a) Optimalprediksjon betyr at man predikerer det mest sannsynlige kjennetegn til B i tilfellene (1) ingen informasjon og (2) gitt A_i.

b) Proporsjonal prediksjon betyr at man i tilfellet (1) predikerer B_j med sannsynlighet $p_{.j}$ for j=1,...,w, og i tilfelle (2) gitt A_i predikeres B_j med sannsynlighet $p_{ij}/p_{i.}$ for j=1,...,w.

Definisjonen av λ_b og η_b er helt tilsvarende med definisjonene (82) og (83) av målene λ og η.

La Q_i^b = P (Riktig optimal prediksjon av B i tilfelle (i)) for i=1,2,

og P_i^b = P (Riktig proporsjonal prediksjon av B i tilfelle (i)) for i=1,2.

Da er:

$$\lambda_b = \frac{(1-Q_1^b)-(1-Q_2^b)}{1-Q_1^b} = \frac{Q_2^b-Q_1^b}{1-Q_1^b}. \tag{114}$$

$$\eta_b = \frac{(1-P_1^b)-(1-P_2^b)}{1-P_1^b} = \frac{P_2^b-P_1^b}{1-P_1^b}. \tag{115}$$

λ_b og η_b er relativ nedgang i sannsynligheten for feilprediksjon fra ukjent til kjent A ved henholdsvis optimal og proporsjonal prediksjon. Målene kan uttrykkes på følgende form:

$$\lambda_b = \frac{\sum_{i=1}^{v} p_{im}-p_{.m}}{1-p_{.m}}. \tag{116}$$

$$\eta_b = \frac{\sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{w} p_{ij}^2/p_{i.} - \sum_{j=1}^{w} p_{.j}^2}{1-\sum_{j=1}^{w} p_{.j}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{w} \frac{(p_{ij}-p_{i.}p_{.j})^2}{p_{i.}}}{1-\sum_{j=1}^{w} p_{.j}^2}. \tag{117}$$

Noen egenskaper ved λ_b:

(i) λ_b er ubestemt hvis og bare hvis en $p_{.j}=1$.

(ii) $0 \leq \lambda_b \leq 1$.

(iii) A,B eksakt uavhengige $\Rightarrow \lambda_b = 0$.

(iv) λ_b er invariant under permutasjon av rader og kolonner.

Egenskapene (i), (ii) og (iv) holder også for η_b, dessuten gjelder:

(iii)': A,B eksakt uavhengige $\Leftrightarrow \eta_b = 0$.

Dersom A er den primære faktoren vil vi få helt tilsvarende mål:

$$\lambda_a = \frac{\sum_{j=1}^{w} p_{mj}-p_{m.}}{1-p_{m.}}. \tag{118}$$

$$\eta_a = \frac{\sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{w} p_{ij}^2/p_{.j} - \sum_{i=1}^{v} p_{i.}^2}{1-\sum_{i=1}^{v} p_{i.}^2}. \tag{119}$$

Ved vurdering av hvilket mål λ_b eller η_b (eventuelt λ_a eller η_a) som er mest anvendelig i en gitt situasjon, vil de samme argumenter gjelde som ved vurderingen av λ og η i III.4 (ii). Vi foretrekker altså η_b som basis for en n.u. hypotese.

III.5. (iii) Intervallestimering av λ_b og η_b. Valg av n.u. hypotese basert på η_b.

Siden alle cellesannsynlighetene antas positive, vil λ_b og η_b være veldefinerte. Som for λ ser man at λ_b ikke har kontinuerlige partielle deriverte m.h.p. p_{ij}-ene. Imidlertid has fra [8] følgende resultat (for definisjoner henvises til lemma 9).

LEMMA 16.

La $$\hat{\lambda}_b = \frac{\sum_{i=1}^{v} q_{im} - q_{.m}}{1-q_{.m}} = \frac{\sum_{i=1}^{v} X_{im} - X_{.m}}{n-X_{.m}} .$$

Da vil dersom, p_{im} *og* $p_{.m}$ *er entydig definert og* $\lambda_b \in \langle 0,1\rangle$ *:*

$$\sqrt{n}\,\frac{(\hat{\lambda}_b-\lambda_b)}{S_b} \xrightarrow{D} N(0,1) \tag{120}$$

hvor

$$S_b^2 = \frac{(1-\sum_{i=1}^{v} q_{im})(\sum_{i=1}^{v} q_{im}+q_{.m}-2\Sigma^r q_{im})}{(1-q_{.m})^3} =$$

$$= \frac{(n-\sum_{i=1}^{v} X_{im})(\sum_{i=1}^{v} X_{im}+X_{.m}-2\Sigma^r X_{im})}{(n-X_{.m})^3} . \tag{121}$$

Ved å anvende teorem 1 får vi et tilsvarende resultat for estimatoren $\hat{\eta}_b$ for η_b.

LEMMA 17.

La $$\hat{P}_2^b = \sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{w} q_{ij}^2/q_{i.} \quad \textit{og} \quad \hat{P}_1^b = \sum_{j=1}^{w} q_{.j}^2 , \quad \hat{\eta}_b = \frac{\hat{P}_2^b-\hat{P}_1^b}{1-P_1^b} .$$

Da vil

$$\sqrt{n}\,\frac{(\hat{\eta}_b-\eta_b)}{S_{0b}} \xrightarrow{D} N(0,1) \tag{122}$$

$$S_{0b}^2 = \frac{1}{(1-\hat{P}_1^b)^4}\{\sum_{i,j} q_{ij}[2\frac{q_{ij}}{q_{i.}}(1-\hat{P}_1^b) - 2q_{.j}(1-\hat{P}_2^b) -$$

$$-\hat{\rho}_i(1-\hat{P}_1^b)]^2 - [\hat{P}_2^b - 2\hat{P}_1^b + \hat{P}_1^b\hat{P}_2^b]^2\} . \qquad (123)$$

Her er $\hat{\rho}_i = \sum_j (q_{ij}/q_{i.})^2$.

(NB! Goodman & Kruskal, [8] s. 354, har fått et annet resultat for S_{0b}^2, noe som må komme av at en faktor er uteglemt ved derivasjonen).

Lemma 16 og 17 gir oss nå følgende konfidensintervaller

$$\lambda_b \in \langle \max\ (0, \hat{\lambda}_b - \frac{S_b}{\sqrt{n}} x(\tfrac{\alpha}{2})),\ \min\ (1, \hat{\lambda}_b + \frac{S_b}{\sqrt{n}} x(\tfrac{\alpha}{2}))\rangle. \qquad (124)$$

$$\lambda_b \in \langle \max\ (0, \hat{\eta}_b - \frac{S_{0b}}{\sqrt{n}} x(\tfrac{\alpha}{2})),\ \min\ (1, \hat{\eta}_b + \frac{S_{0b}}{\sqrt{n}} x(\tfrac{\alpha}{2}))\rangle. \qquad (125)$$

Tester for hypotesene

$$H_3^* : \lambda_b \leq c_3 . \qquad (126)$$

$$H_4^* : \eta_b \leq c_4 . \qquad (127)$$

er gitt ved:

Forkast H_3^* hvis: $\sqrt{n}\,\dfrac{(\hat{\lambda}_b - c_3)}{S_b} > x(\alpha)$.

Forkast H_4^* hvis: $\sqrt{n}\,\dfrac{(\hat{\eta}_b - c_4)}{S_{0b}} > x(\alpha)$.

Valg av c_4 slik at (127) er en n.u. hypotese følger fra n.u. kriteriet (100) siden $\eta_b = \tau_b^2$ i 2×2-tabellen, dvs. $c_4 = c_2 = \delta^2$.

III.6. Pålitelighets-situasjonen.

III.6. (i) Det uordnete symmetriske tilfelle.

Situasjonen er beskrevet i III.2 (se også [6], s. 756). Det spesielle i dette tilfellet er at $A_i = B_i$ for $i=1,\ldots,v$. I denne situasjonen er man ofte interessert i graden av enighet mellom to metoder som A og B vanligvis refererer seg til. For situasjonen hvor kjennetegnene ikke innehar en relevant ordning, konstruerer Goodman & Kruskal, [6], et mål ut fra den symmetriske prediksjonsmodell gitt i III.4 (i). Prediksjonsmetoden er som følger:

I tilfelle (1) predikeres den B_i med $p_{i.}+p_{.i} = p_{M.}+p_{.M} = \max_{i'} (p_{i'.}+p_{.i'})$. Tilsvarende dersom A blir trukket.

I tilfelle (2) gitt A_i predikeres B_i. Tilsvarende dersom A predikeres.

La Λ_i = P (Riktig prediksjon i tilfelle (i)) for i=1,2.

Målet som foreslås er definert helt analogt med λ, η, λ_b og η_b:

$$\lambda_r = \frac{(1-\Lambda_1)-(1-\Lambda_2)}{1-\Lambda_1} = \frac{\Lambda_2-\Lambda_1}{1-\Lambda_1} . \tag{128}$$

Man finner at:

$$\Lambda_1 = \frac{1}{2}(p_{M.}+p_{.M})$$

$$\Lambda_2 = \sum_{i=1}^{v} p_{ii}$$

slik at:

$$\lambda_r = \frac{\sum_{i=1}^{v} p_{ii} - \frac{1}{2}(p_{M.}+p_{.M})}{1-\frac{1}{2}(p_{M.}+p_{.M})} . \tag{129}$$

Noen egenskaper:

i) $-1 \leq \lambda_r \leq 1$.

ii) λ_r antar ingen spesiell verdi når A og B er eksakt uavhengige, men som Goodman & Kruskal argumenterer, så vil et mål som λ_r bare bli brukt når det er kjent at det er sammenheng mellom metodene A og B, slik at denne uønskede egenskapen ikke er så viktig. I [8] blir det vist at, hvis λ_r er veldefinert, $\lambda_r \neq \pm 1$ og $p_{M.}+p_{.M}$ er entydig, så vil

$$\sqrt{n}\,\frac{\hat{\lambda}_r-\lambda_r}{S_r} \xrightarrow{D} N(0,1) \tag{130}$$

hvor $$\hat{\lambda}_r = \frac{\sum_{i=1}^{v} q_{ii} - \frac{1}{2}(q_{M.}+q_{.M})}{1-\frac{1}{2}(q_{M.}+q_{.M})} ; \quad q_{M.}+q_{.M} = \max_i (q_{i.}+q_{.i})$$

og $$S_r^2 = [1-\frac{1}{2}(q_{M.}+q_{.M})]^{-2}\{(1-\sum_{i=1}^{v} q_{ii})[\sum_{i=1}^{v} q_{ii}+\frac{1}{4}(q_{M.}+q_{.M}) \times$$
$$(1-\sum_{i=1}^{v} q_{ii}-(q_{M.}+q_{.M})) - q_{MM}(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{v} q_{ii}-(q_{M.}+q_{.M})]\} \tag{131}$$

q_{MM} er den q_{ii} hvor $q_{i.}+q_{.i} = q_{M.}+q_{.M}$.

(130) kan utnyttes til å teste hypoteser og konstruere konfidensintervaller for λ_r.

III.6. (ii) Det ordnete tilfelle.

I denne situasjonen har det vært vanlig å bruke mål av typen $\pi_k = \sum_{|i-j|\leq k} p_{ij}$ for en valgt k. F.eks. er $\pi_0 (= \sum_{i=1}^{v} p_{ii})$ sannsynligheten for at metodene "er enige" (dvs. gir samme resultat).

I dette tilfellet kan vi bruke eksakt fordelingsteori ved testing og estimering. La $X_k = \sum_{|i-j|\leq k} X_{ij}$, spesielt så er $X_0 = \sum_{i=1}^{v} X_{ii}$. Da ser man umiddelbart at X_k er binomisk (π_k, n) dvs. at

$$P(X_k = x) = \binom{n}{x} \pi_k^x (1-\pi_k)^{n-x} , \qquad \text{for } x=0,1,..,n.$$

Det følger da enkelt hvordan testing og estimering av π_k kan foretas ved optimale metoder.

Teorem 1 reduseres i dette tilfellet til det vanlige sentralgrenseteorem for uavhengige identisk fordelte variable (Se setn. C i appendiks B).

III.7. Blandet situasjon.

Et tilfelle som ikke er behandlet i noen av de artiklene som det refereres til, er den situasjonen hvor vi har nominalnivå for den ene av de variable (Y,Z) og ordinalnivå for den andre. Her vil vi nå diskutere denne situasjonen, og fremme enkelte forslag på avhengighetsmål. La oss for enkelthets skyld anta at Y har ordinalnivå. Hva slags mål man bør velge vil bero på hvilke trekk ved avhengighet man primært er interessert i. Det synes naturlig å skille mellom følgende tre situasjoner.

a) Asymmetrisk situasjon. B er av primær interesse.
b) Asymmetrisk situasjon. A er av primær interesse.
c) Symmetrisk situasjon.

a) B har primær interesse.

Siden det ikke foreligger noen interessant ordning mellom kjennetegnene til B, synes det rimelig at en asymmetrisk prediksjonsmodell som i III.5 (i) er relevant her. Følgelig bør målet være konstruert ut fra denne modellen. λ_b og η_b er derfor passende mål.

b) A har primær interesse.

Siden kjennetegnene for den primære faktor innehar en relevant ordning vil det være rimelig å kreve at målet iallfall ikke er invariant under permutasjon av rader i kontingenstabellen. Dermed er alle mål i den uordnete situasjonen ute av betraktning.

Et passende mål synes da å være et som er konstruert for den ordnete situasjonen, dvs. γ , siden vi fant at dette er det naturligste av de tre som ble vurdert i III.3.

c) Symmetrisk situasjon.

Denne situasjonen opptrer som før nevnt når det er ingen grunn til å gi den ene faktor prioritet framfor den andre. Intuitivt synes det rimelig at et avhengighetsmål i en slik situasjon er en funksjon av to mål D_1, D_2, hvor D_1 er et mål i den ordnete situasjonen ($-1 \leq D_1 \leq 1$), og D_2 et mål konstruert for den uordnete situasjonen ($0 \leq D_2 \leq 1$).
En slik funksjon $h(D_1,D_2)$ burde da idealistisk sett ha følgende egenskaper:

1) Invariant under permutasjon av kolonner.
2) Ikke invariant under permutasjon av rader.

Dette synes imidlertid å være en altfor ambisiøs forutsetning. En mer upresis betingelse er:

h bør utnytte informasjonen fra D_1 og D_2 i "like stor grad".

Dessuten kan det være ønskelig at

$$h(D_1,D_2) = 0 \Leftrightarrow D_1 = D_2 = 0 \,. \tag{132}$$

Eksempler på slike mål er:

i) $h(D_1,D_2) = a(|D_1|+D_2)$

ii) $h(D_1,D_2) = b(D_1^2+D_2)$; a og b er konstanter.

Målene i) og ii) vil være ikke-negative. Dersom man synes at betingelsen (132) er uvesentlig, kan andre mål av formen $c(D_1+D_2)$ og $d(D_1 \cdot D_2)$ komme på tale, hvor c, d er konstanter.

Tilslutt skal vi spesielt betrakte 2×2-tilfellet.

III.8. 2×2-tabellen.

III.8. (i) Utledning av et avhengighetsmål.

2×2-kontingenstabellen kan settes opp slik:

	B	$\bar{B}$
A	p_{11}	p_{12}
$\bar{A}$	p_{21}	p_{22}

(133)

A og B er de to egenskapene vi skal måle avhengigheten mellom. $\bar{A}$ og $\bar{B}$ er deres negasjoner (komplementer). Cellesannsynlighetene kan uttrykkes på følgende form:

LEMMA 18.

$$p_{11} = p_{1.}p_{.1} + (\Delta-1)p_{12}p_{21}$$
$$p_{12} = p_{1.}p_{.2} - (\Delta-1)p_{12}p_{21}$$
$$p_{21} = p_{2.}p_{.1} - (\Delta-1)p_{12}p_{21}$$
$$p_{22} = p_{2.}p_{.2} + (\Delta-1)p_{12}p_{21}$$

hvor $\Delta = \dfrac{p_{11}p_{22}}{p_{12}p_{21}}$ *er kryssprodukt-forholdet.*

Den eksakte uavhengighetshypotesen kan formuleres slik

$$H : p_{11}p_{22} = p_{12}p_{21} \qquad (\Longleftrightarrow \Delta = 1) . \tag{134}$$

Det er visse rimelige forutsetninger et avhengighetsmål for (A,B) bør tilfredsstille i en 2×2-tabell (se [2] og [14], s.4). I de fleste tilfeller vil følgende tre krav være rimelige:

1) Målet må være en funksjon av den betingede sannsynlighet for B gitt A, $p_{11}/\left(p_{11}+p_{12}\right)$, og den betingede sannsynlighet for B gitt $\bar{A}$, $p_{21}/\left(p_{21}+p_{22}\right)$, eller alternativt av den betingede sannsynlighet for A gitt B, $p_{11}/\left(p_{11}+p_{21}\right)$, og den betingede sannsynlighet for A gitt $\bar{B}$, $p_{12}/\left(p_{12}+p_{22}\right)$.

2) De alternative mål i 1) skal være like.

3) Målet bør forandre seg monotont for et gitt sett av marginaler $p_{1.}$ og $p_{.1}$, når avhengigheten blir sterkere.

Kravene 1), 2) og 3) leder til at avhengighetsmålet må være en en-entydig funksjon H av kryssproduktforholdet Δ. (iflg. Edwards, [2].)

H(Δ) vil være invariant under multiplikasjon av rader og/eller kolonner, dvs. H(Δ) gir samme verdi til tabellen (133) og tabellen:

	B	$\bar{B}$
A	$r_1c_1p_{11}$	$r_1c_2p_{12}$
$\bar{A}$	$r_2c_1p_{21}$	$r_2c_2p_{22}$

(135)

for alle ikke-negative r_1, r_2, c_1, c_2, slik at $r_1c_1p_{11}+r_1c_2p_{12}+r_2c_1p_{21}+r_2c_2p_{22}=1$. Det er dermed vist at det naturlige valg av avhengighetsmål i 2×2-tabellen essensielt er kryssprodukt-forholdet Δ.

Her vil vi nå nevne fire mål som er en-entydige funksjoner av Δ.

Yules "coefficient of association":

$$d_1 = \frac{p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21}}{p_{11}p_{22}+p_{12}p_{21}} = \frac{\Delta-1}{\Delta+1} = 1 - \frac{2}{\Delta+1} \quad . \tag{136}$$

(d_1 er det ordinalinvariante målet γ i 2×2-tilfellet).

Yules "coefficient of colligation":

$$d_2 = \frac{\sqrt{p_{11}p_{22}} - \sqrt{p_{12}p_{21}}}{\sqrt{p_{11}p_{22}} + \sqrt{p_{12}p_{21}}} = \frac{\sqrt{\Delta}-1}{\sqrt{\Delta}+1} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\Delta}+1} \ . \tag{137}$$

$$\rho = \ln \Delta \tag{138}$$

og selvfølgelig Δ selv.

Yules to mål er strengt økende når Δ øker.

La oss nå definere hva vi mener med positiv og negativ avhengighet mellom A og B i 2×2-tabellen (133).

Definisjon 10. Dersom $\Delta > 1 (p_{11}p_{22} > p_{12}p_{21})$ sier vi det er positiv avhengighet (p.a.) mellom A og B. Dersom $\Delta < 1$ er A og B negativt avhengige (n.a.).

Noen egenskaper ved Yules to mål:

(i) $-1 \leq d_i \leq 1$, og $d_i > 0$ hvis p.a., $d_i < 0$ hvis n.a. for $i=1,2$.

(ii) $d_i = 0 \Leftrightarrow$ A og B er eksakt uavhengige.

(iii) d_i antar verdien -1 når $p_{11}=0$ eller $p_{22}=0$, for $i=1,2$.
d_i antar verdien +1 når $p_{12}=0$ eller $p_{21}=0$, for $i=1,2$.

Dersom vi ikke er interessert i hvilken retning avhengigheten går, men bare i graden av avhengighet, vil et av målene d_1^2, d_2^2 eller ρ^2 være passende. For testing av n.u. vil det være likegyldig hvilket vi velger, siden en hypotese om et mål vil være ekvivalent med hypoteser om de andre målene. For testing av d_1^2 henviser vi til III.3 (vi). Senere blir det vist at det eksisterer en overalt sterkeste styrkerett α-nivå test for n.u. basert på ρ^2. La oss derfor vise hva n.u. hypotesen blir basert på $d=\rho^2$, og angi N-testen for den nevnte hypotesen. Som nevnt i III.1 vil vi fra nå av anta at ingen p_{ij} er lik null.

III.8. (ii) Valg av n.u. hypotese, og dens normal-test.

N.u. hypotesen basert på d kan formuleres slik:

$$H^* : (\ln \Delta)^2 \leq c \tag{139}$$

Som basis for valg av c benytter vi n.u. kriteriet (72), som i 2×2-tilfellet blir:

$$-\varepsilon \leq \frac{\Delta-1}{\Delta+1} \leq \varepsilon \, . \tag{140}$$

Følgende ekvivalenser gjelder:

$$-\varepsilon \leq \frac{\Delta-1}{\Delta+1} \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq 1 - \frac{2}{\Delta+1} \leq \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \varepsilon \leq \frac{2}{\Delta+1} \leq 1 + \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1+\varepsilon} \leq \Delta + 1 \leq \frac{2}{1-\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \leq \Delta \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \, .$$

Dvs. at A og B er n.u. hvis og bare hvis

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \leq \Delta \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \, . \tag{141}$$

Det er klart at Δ og Δ^{-1} svarer til samme grad av avhengighet, i motsatte retninger. Vi ser at $\Delta \in [\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}, \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}]$ hvis og bare hvis $\Delta^{-1} \in [\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}, \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}]$, slik at (141) er et rimelig n.u. kriterium. Videre er (141) ekvivalent med:

$$\ln \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \leq \ln \Delta \leq \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \Leftrightarrow -\ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \leq \ln \Delta \leq \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow (\ln \Delta)^2 \leq (\ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon})^2 .$$

Herav bestemmes $c = (\ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon})^2$, og n.u. hypotesen (139) blir dermed lik:

$$H^* : (\ln \Delta)^2 \leq (\ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon})^2 \, , \tag{142}$$

hvor ε er bestemt ved (72). Nedenfor gis en tabell over c-verdier for noen valgte ε-verdier.

ε	0.01	0.05	0.10
c	0.0004	0.01	0.04

$$\hat{d} = (\ln \frac{q_{11}q_{22}}{q_{12}q_{21}})^2 = (\ln \frac{X_{11}X_{22}}{X_{12}X_{21}})^2 \tag{143}$$

K-estimatoren S_d^2 for den asymptotiske variansen til $\sqrt{n}\hat{d}$ er gitt i følgende lemma.

LEMMA 19.

$$d_{ij} = \frac{\partial d}{\partial p_{ij}} = \begin{cases} \frac{2}{p_{ii}} \ln \Delta & i=j,\ i=1,2. \\ -\frac{2}{p_{ij}} \ln \Delta & i \neq j. \end{cases}$$

$$d^* = 0$$

$$S_d^2 = 4\hat{d}nS^2 \tag{144}$$

hvor $S^2 = X_{11}^{-1} + X_{22}^{-1} + X_{12}^{-1} + X_{21}^{-1}$. (145)

(ved bruk av (144) *antas at ingen* X_{ij} *er lik 0).*

Fra lemma 19 has at N-testen for H^* er gitt ved:
Forkast H^* hvis

$$\frac{\hat{d}-c}{2S\sqrt{\hat{d}}} > x(\alpha) \ . \tag{146}$$

Angående betingelse 46b) reduserer den seg til å anta $\Delta \neq 1$ dvs. $d = \rho^2 > 0$.

III.8. (iii) En overalt sterkeste styrkerett test for n.u. .

Definisjon 11. La X være en stokastisk variabel hvis fordeling avhenger av en parameter θ som a priori ligger i et område Ω. La ϕ være en test for hypotesen H: $\theta \in \omega_0$ mot $\theta \in \Omega - \omega_0$.

La videre β_ϕ være styrkefunksjonen til ϕ. ϕ kalles en styrkerett α-nivå test hvis

$$\beta_\phi(\theta) \leq \alpha \quad \text{for} \quad \theta \in \omega_0 \qquad \text{og } \beta_\phi(\theta) \geq \alpha \quad \text{for } \theta \in \Omega - \omega_0. \tag{147}$$

Definisjon 12. La situasjonen være som i definisjon 11, og la

$$M_\alpha = \{\phi | \phi \text{ er en styrkerett } \alpha\text{-nivå test for H}\}.$$

ϕ_0 er en overalt sterkeste styrkerett (OSS) α-nivå test for H, dersom $\phi_0 \in M_\alpha$ og $\beta_{\phi_0}(\theta) \geq \beta_\phi(\theta)$ for alle $\phi \in M_\alpha$ og $\theta \in \Omega - \omega_0$.

Det vil nå bli utledet en OSS-α-nivå-test for H^*: $(\ln \Delta)^2 \leq c$ eller ekvivalent for

$$H^{**} : -k \leq \ln \Delta \leq k \tag{148}$$

hvor $k = \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$.

La oss kalle denne testen for δ_0. Da vil δ_0 være en OSS-α-nivåtest for en n.u. hypotese basert på ethvert mål som er en en-entydig funksjon av Δ, og hvor n.u. pr. definisjon er gitt ved (141). Spesielt er δ_0 en OSS-α-nivåtest for

$$H_0 : -\varepsilon \leq \frac{\Delta-1}{\Delta+1} \leq \varepsilon.$$

La $X = (X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22})$. Vi vil bruke samme notasjon som i Sverdrup, [21].

La P_0 være sannsynlighetsfordelingen for X i punktet: $p_{11}=p_{12}=p_{21}=p_{22} = \frac{1}{4}$. X har da sannsynlighetsfordeling P gitt ved:

$$dP = (4p_{22})^n e^{\tau_1 x_{1.} + \tau_2 x_{.1} + \rho x_{11}} dP_0 \quad \text{(se [21], s. 40-41)} \tag{149}$$

(betyr: $P(X\in A) = P(A) = \int_A (4p_{22})^n e^{\tau_1 x_{1.} + \tau_2 x_{.1} + \rho x_{11}} dP_0$).

Her er $\tau_1 = \ln \frac{p_{12}}{p_{22}}$ og $\tau_2 = \ln \frac{p_{21}}{p_{22}}$, $x_{1.}=x_{11}+x_{12}$ og $x_{.1}=x_{11}+x_{21}$.

La $x = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22})$. Fra Lehmann ([12], ch. 4.4) har vi at en OSS-α-nivåtest δ_0 for H^{**} er gitt ved:

$$\delta_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x_{11} < C_1(x_{1.}, x_{.1}) \text{ eller } x_{11} > C_2(x_{1.}, x_{.1}) \\ \gamma_i(x_{1.}, x_{.1}) & \text{hvis } x_{11} = C_i(x_{1.}, x_{.1}) \text{ for } i=1,2. \\ 0 & \text{hvis } C_1(x_{1.}, x_{.1}) < x_{11} < C_2(x_{1.}, x_{.1}) \end{cases} \tag{150}$$

hvor C_1, C_2, γ_1, γ_2 er bestemt ved:

$$E_{-k}[\delta_0(X) | X_{1.}, X_{.1}] = E_k[\delta_0(X) | X_{1.}, X_{.1}] = \alpha \; . \tag{151}$$

For å bestemme C_i, γ_i $i=1,2$, trenger vi den betingede fordeling for X gitt marginalene. Det sees lett at:

$$P(X=x|X_{1.}=x_1 \cap X_{.1}=y_1) = \begin{cases} P(X_{11}=x_{11}|X_{1.}=x_1 \cap X_{.1}=y_1) & \text{når } x_{11}+x_{12}=x_1 \\ & \text{og } x_{11}+x_{21}=y_1 \\ 0 \text{ ellers} & \end{cases} .$$

Den betingede fordeling for X_{11} gitt marginalene er uttrykt ved sannsynlighetene i lemma 20.

LEMMA 20.

$$P(X_{11}=x_{11}|X_{1.}=x_1 \cap X_{.1}=y_1) = \frac{\binom{x_1}{x_{11}}\binom{n-x_1}{y-x_{11}}e^{\rho x_{11}}}{\sum_{z=0}^{\min(x_1,y_1)} \binom{x_1}{z}\binom{n-x_1}{y_1-z}e^{\rho z}} = f_\rho(x_{11}|x_1,y_1) \quad (152)$$

$C_1, C_2, \gamma_1, \gamma_2$ er dermed bestemt ved følgende to likninger:

$$\sum_{x_{11}=0}^{C_1-1} f_k(x_{11}|x_1,y_1) + \sum_{x_{11}=C_2+1}^{n} f_k(x_{11}|x_1,y_1) + \gamma_1 f_k(C_1|x_1,y_1) + \gamma_2 f_k(C_2|x_1,y_1) = \alpha$$

$$\sum_{x_{11}=0}^{C_1-1} f_{-k}(x_{11}|x_1,y_1) + \sum_{x_{11}=C_2+1}^{n} f_{-k}(x_{11}|x_1,y_1) + \gamma_1 f_{-k}(C_1|x_1,y_1) + \gamma_2 f_{-k}(C_2|x_1,y_1) = \alpha.$$

for alle x_1, y_1 slik at $0 \leq x_1 + y_1 \leq n$.

III.8. (iv) Konfidensintervaller for kryssprodukt-forholdet.

Fisher, [3], foreslo en metode for å oppnå et konfidensintervall for Δ som krevde løsning av en kvadratisk likning. Goodman, [5], utviklet en enklere metode til å konstruere konfidensintervall for Δ med asymptotisk konfidensgrad lik $1-\alpha$. Her vil vi nå vise hvordan vi ved å anvende teorem 1 kommer fram til samme konfidensintervall for Δ som det Goodman angir. Vår metode er imidlertid enklere enn den Goodman foreslår. Ved anvendelse av teorien i dette avsnittet antas at ingen X_{ij} er lik null.

La $\hat{\Delta} = \dfrac{X_{11}X_{22}}{X_{12}X_{21}}$, $\Delta_{ij} = \dfrac{\partial \Delta}{\partial p_{ij}}$ og $\Delta^* = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p_{ij}\Delta_{ij}$.

Da gjelder følgende resultat:

LEMMA 21.

$$\Delta_{11} = \frac{p_{22}}{p_{12}p_{21}}, \quad \Delta_{22} = \frac{p_{11}}{p_{12}p_{21}}, \quad \Delta_{12} = -\Delta\frac{1}{p_{12}}, \quad \Delta_{21} = -\Delta\frac{1}{p_{21}}.$$

$$\Delta^* = 0.$$

$$S_\Delta^2 = n\hat{\Delta}^2 \cdot S^2$$

hvor S^2 *er definert i lemma 19.*

Fra teorem 1 og lemma 21:

$$\frac{\hat{\Delta}-\Delta}{\hat{\Delta}\cdot S} \xrightarrow{D} N(0,1) . \tag{153}$$

En tilstrekkelig betingelse for at a) og b) i III.1 er tilfredsstilt i dette tilfelle er at $p_{ij} > 0$ for $i=1,2$ og $j=1,2$.

Et konfidensintervall for Δ med tilnærmet konfidensgrad lik $1-\alpha$ er nå gitt ved:

$$\Delta \in \langle \max\ (0,\hat{\Delta}(1-x(\tfrac{\alpha}{2})\cdot S)),\hat{\Delta}(1+x(\tfrac{\alpha}{2})\cdot S)\rangle \tag{154}$$

som er det samme intervall som Goodman kommer fram til([5], s. 90).

Fra teorem 1 har vi også at

$$\sqrt{n}\,\frac{\hat{\Delta}-\Delta}{\Delta\sqrt{p_{11}^{-1}+p_{12}^{-1}+p_{21}^{-1}+p_{22}^{-1}}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

og siden $\sqrt{n}S \xrightarrow{P} \sqrt{p_{11}^{-1}+p_{12}^{-1}+p_{21}^{-1}p_{22}^{-1}}$, vil også

$$\frac{\hat{\Delta}-\Delta}{\Delta\cdot S} \xrightarrow{D} N(0,1) . \tag{155}$$

Følgende relasjoner holder:

$$\{-x(\tfrac{\alpha}{2}) < \frac{\hat{\Delta}-\Delta}{\Delta\cdot S} < x(\tfrac{\alpha}{2})\} \Longleftrightarrow \{\Delta(1-x(\tfrac{\alpha}{2})S) < \hat{\Delta} < \Delta(1+x(\tfrac{\alpha}{2})S)\}$$

$$\Rightarrow \{\frac{\hat{\Delta}}{1+x(\frac{\alpha}{2})S} < \Delta < \hat{\Delta}I(1-x(\tfrac{\alpha}{2}).S)\} \Rightarrow \{\Delta(1-x(\tfrac{\alpha}{2})S) \leq \hat{\Delta} < \Delta(1+x(\tfrac{\alpha}{2})S)\}.$$

Her er funksjonen I definert ved:

$$I(x) = \begin{cases} 1/x & \text{hvis } x > 0 \\ \infty & \text{hvis } x \leq 0 \end{cases} .$$

Ovenstående gir et konfidensintervall for Δ med asymptotisk konfidensgrad lik $1-\alpha$.

$$\Delta \in \left\langle \frac{\hat{\Delta}}{1+Sx(\frac{\alpha}{2})}, \ \hat{\Delta}I(1-Sx(\frac{\alpha}{2}))\right\rangle. \tag{156}$$

Det sees lett at $L(154) < L(156)$, også når $1-Sx(\frac{\alpha}{2}) > 0$, hvor $L(154)$ er lengden til intervallet gitt ved (154) og $L(156)$ tilsvarende.

(154) kan anvendes til å konstruere konfidensintervaller for enhver en-entydig funksjon $H(\Delta)$:

$$\hat{\Delta}(1-x(\tfrac{\alpha}{2})S) < \Delta < \hat{\Delta}(1+x(\tfrac{\alpha}{2})S)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} H(\hat{\Delta}-\hat{\Delta}x(\frac{\alpha}{2})S) < H(\Delta) < H(\hat{\Delta}+\hat{\Delta}x(\frac{\alpha}{2})S) & \text{hvis } H \text{ er strengt voksende i } \Delta. \\ H(\hat{\Delta}+\hat{\Delta}x(\frac{\alpha}{2})S) < H(\Delta) < H(\hat{\Delta}-\hat{\Delta}x(\frac{\alpha}{2})S) & \text{hvis } H \text{ er strengt avtagende i } \Delta. \end{cases}$$

F.eks. vil et intervall for $\gamma = \frac{\Delta-1}{\Delta+1}$ basert på (154) være:

$$\gamma \in \left\langle \max\left(-1, \frac{\hat{\Delta}(1-x(\frac{\alpha}{2})S)-1}{\hat{\Delta}(1-x(\frac{\alpha}{2})S)+1}\right), \frac{\hat{\Delta}(1+x(\frac{\alpha}{2})S)-1}{\hat{\Delta}(1+x(\frac{\alpha}{2})S)+1}\right\rangle . \tag{157}$$

Intervallet (157) kan også uttrykkes slik:

$$\gamma \in \left\langle \max\left(-1, \frac{X_{11}X_{22}(1-x(\frac{\alpha}{2})S)-X_{12}X_{21}}{X_{11}X_{22}(1-x(\frac{\alpha}{2})S)+X_{12}X_{21}}\right), \frac{X_{11}X_{22}(1+x(\frac{\alpha}{2})S)-X_{12}X_{21}}{X_{11}X_{22}(1+x(\frac{\alpha}{2})S)+X_{12}X_{21}}\right\rangle$$

I 2×2-tilfellet finner en at S_γ^2 kan uttrykkes slik:

LEMMA 22.

$$S_\gamma^2 = \frac{4\hat{\Delta}^2}{(\hat{\Delta}+1)^4} nS^2 .$$

Konfidensintervallet (71) for γ blir dermed i denne situasjon lik:

$$\gamma \in \left\langle \max\left(-1, \frac{\hat{\Delta}-1}{\hat{\Delta}+1} - \frac{2\hat{\Delta}Sx(\frac{\alpha}{2})}{(\hat{\Delta}+1)^2}\right), \min\left(1, \frac{\hat{\Delta}-1}{\hat{\Delta}+1} + \frac{2\hat{\Delta}Sx(\frac{\alpha}{2})}{(\hat{\Delta}+1)^2}\right)\right\rangle. \tag{158}$$

Hvis $S\cdot x(\frac{\alpha}{2}) \leq 1$, så er intervallgrensene i (158) lik henholdsvis

$$\frac{\hat{\Delta}-1}{\hat{\Delta}+1} - \frac{2\hat{\Delta}Sx(\frac{\alpha}{2})}{(\hat{\Delta}+1)^2}, \quad \frac{\hat{\Delta}-1}{\hat{\Delta}+1} + \frac{2\hat{\Delta}Sx(\frac{\alpha}{2})}{(\hat{\Delta}+1)^2} .$$

La nå L_1 være lengden til intervallet (157) og L_2 lengden til intervallet (158). Da gjelder følgende resultat.

LEMMA 23.

a) *Hvis* $S\cdot x(\frac{\alpha}{2}) \leq 1$, *så er* $L_2 < L_1$.

b) *Hvis* $S\cdot x(\frac{\alpha}{2}) \geq 1 + \max(\hat{\Delta}^{-1},\hat{\Delta})$, *så er* $L_2 > L_1$.

c) $P(L_2 < L_1) \underset{n\to\infty}{\to} 1.$ (159)

Asymptotisk er altså intervallet (158) bedre enn (157).

Et konfidensintervall for $\rho=\ln\Delta$, basert på (154), er gitt ved:

$$\rho \in \langle\hat{\rho}+\ln(1-Sx(\tfrac{\alpha}{2})),\ \hat{\rho}+\ln(1+Sx(\tfrac{\alpha}{2}))\rangle . \tag{160}$$

Her er $\hat{\rho} = \ln\hat{\Delta}$.

Et konfidensintervall for ρ^2 er gitt ved (fra lemma 19)):

$$\rho^2 \in \langle\max(0,\hat{\rho}^2 - 2|\hat{\rho}|Sx(\tfrac{\alpha}{2})),\ \hat{\rho}^2 + 2|\hat{\rho}|Sx(\tfrac{\alpha}{2})\rangle. \tag{161}$$

III.8. (v) Konfidensintervaller for et alternativt avhengighetsmål.

Det kan selvfølgelig forekomme situasjoner hvor andre mål enn de basert på Δ kan være anvendelige. Her vil vi nevne ett, nemlig τ_b (se III.3 (iii)) gitt ved (57), eller $\beta=\tau_b^2$ hvis vi bare er interessert i graden av avhengighet. (For andre mål, se [2] og [7]). For testing av n.u. basert på β viser vi til III.4(iv), og målet η. I 2×2-tilfellet finner man at S_η^2 (her kalt S_β^2) kan uttrykkes på følgende form:

LEMMA 24.

$$S_\beta^2 = \hat{\mu}^{-4}\hat{\theta}^2\{q_{11}b_{22}^2+q_{22}b_{11}^2+q_{12}b_{21}^2+q_{21}b_{12}^2-(q_{11}b_{22}+q_{22}b_{11}-q_{12}b_{21}-q_{21}b_{12})^2\}.$$

hvor

$$\hat{\mu} = q_{1.}q_{2.}q_{.1}q_{.2}$$
$$\hat{\theta} = q_{11}q_{22}-q_{12}q_{21}$$

og

$$b_{ij} = q_{i.}q_{.j}\{q_{i.}q_{.j}(2-q_{i.}-q_{.j}) - q_{ij}(q_{i.}+q_{.j}-2q_{i.}q_{.j})\}.$$

Konfidensintervallet for β: $\beta \in \langle\max(0,\hat{\beta}-\frac{S_\beta}{\sqrt{n}}x(\frac{\alpha}{2})),\ \min(1,\hat{\beta}+\frac{S_\beta}{\sqrt{n}}x(\frac{\alpha}{2}))\rangle$,

hvor

$$\hat{\beta} = \frac{\hat{\theta}^2}{\hat{\mu}} = \frac{(X_{11}X_{22}-X_{12}X_{21})^2}{X_{1.}X_{2.}X_{.1}X_{.2}} .$$

La $C_1 = \hat{\beta} - \frac{S_\beta}{\sqrt{n}} x(\frac{\alpha}{2})$ og $C_2 = \hat{\beta} + \frac{S_\beta}{\sqrt{n}} x(\frac{\alpha}{2})$. Vi har da at

$$\max (0,C_1) < \beta < \min (1,C_2)$$

$$\Rightarrow \; - \min (1,\sqrt{C_2}) < \tau_b < \min (1,\sqrt{C_2}).$$

Dette gir et intervall for τ_b med konfidensgrad $P \geq 1-\alpha$:

$$\tau_b \in \langle -\min (1,\sqrt{C_2}), \min (1,\sqrt{C_2} \rangle \; . \tag{162}$$

Fra III.3 (vii) har vi gitt konfidensintervall for τ_b med asymptotisk konfidensgrad lik $1-\alpha$. Vi finner lett at her er

$$S_b^2 = \frac{1}{4\hat{\tau}_b^2} S_\beta^2 \qquad (\frac{\partial\beta}{\partial p_{ij}} = 2\tau_b \cdot \frac{\partial\tau_b}{\partial p_{ij}}) \; .$$

Herav følger at intervallet (80) for τ_b kan uttrykkes slik:

$$\tau_b \in \langle \max (-1,\hat{\tau}_b - \frac{S_\beta}{2|\hat{\tau}_b|\sqrt{n}} x(\frac{\alpha}{2})), \min (1,\hat{\tau}_b + \frac{S_\beta}{2|\hat{\tau}_b|\sqrt{n}} x(\frac{\alpha}{2}))\rangle \tag{163}$$

La $K_1 = \hat{\tau}_b - \frac{S_\beta}{2|\hat{\tau}_b|\sqrt{n}} x(\frac{\alpha}{2})$ og $K_2 = \hat{\tau}_b + \frac{S_\beta}{2|\hat{\tau}_b|\sqrt{n}} x(\frac{\alpha}{2})$. La videre

$L_1^* = 2\sqrt{C_2}$, dvs. lengden til intervallet $\langle -\sqrt{C_2}, \sqrt{C_2}\rangle$, og tilsvarende $L_2^* = K_2 - K_1$. Følgende lemma gir oss endel resultater om forholdet mellom L_1^* og L_2^*:

LEMMA 25.

(a) $\left((\frac{L_1^*}{L_2^*})\right)^2 = \frac{4\hat{\tau}_b^2\sqrt{n}}{S_\beta x(\frac{\alpha}{2})} [\frac{\hat{\tau}_b^2\sqrt{n}}{S_\beta x(\frac{\alpha}{2})} + 1]$

(b) $C_1 > 0 \Rightarrow L_2^* < \frac{\sqrt{2}}{4} L_1^*$

(c) $\frac{L_1^*}{L_2^*} > 1 \Leftrightarrow \frac{\hat{\tau}_b^2\sqrt{n}}{S_\beta x(\frac{\alpha}{2})} > \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ (=0.207)

(d) $\lim_{n\to\infty} P(L_2^* < L_1^*) = 1.$

III.9. Avsluttende kommentarer om avhengighetsmål.

Som vi har sett, vil de fleste mål som er konstruert ut fra en gitt modell,ha den egenskapen at de er null hvis det foreligger ingen avhengighet relativt til de relevante avhengighetstrekk målet er konstruert for, selv om andre typer av avhengighet muligens er tilstede. Dette må vi vente siden vi skjerper "definisjonen" av avhengighet i de forskjellige situasjonene. Merk at for alle situasjoner, unntagen III.6, vil eksakt uavhengighet mellom A og B medføre at målet er lik null. Tilslutt vil vi igjen som i II.2, presisere at ved valg av avhengighetsmål for en gitt kontingenstabell, bør man velge det mål som gir best informasjon om de avhengighetstrekk som er av interesse.

Som avslutning på kapittel III vil vi gi tre eksempler (fra [16]). I hvert eksempel vil de mål som vi mener kan være passende anvendes. Konfidensintervaller angis, og testing av n.u. foretas. (NB! Tallene er ikke kontrollert, slik at det tas forbehold for riktigheten av beregningene).

III.10. 3 eksempler.

For ethvert mål d for grad av avhengighet som betraktes vil n.u. hypotesen i eksemplene velges lik:

$$H^* : d \leq 0.0025 .$$

F.eks. dersom $d = \gamma^2$, velges $\varepsilon=0.05$ i n.u. kriteriet (72).

Eksempel 1. La oss først vende tilbake til eksempel 1 fra I.1. Vi lar faktor A være yrke. De åtte yrkesgruppene i tabellen er:

A_1: Selvstendige i jordbruk, skogbruk og fiske.
A_2: Andre selvstendige.
A_3: Ansatte i industri, bygg, anlegg og gruvedrift.
A_4: Andre ansatte.
A_5: Skoleelever.
A_6: Pensjonister.
A_7: Husmødre.
A_8: Andre.

Det ble vist at med kji-kvadrat-testen vil vi påstå avhengighet mellom yrke og valgdeltaking (faktor B). Ved testing av n.u. vil vi komme til å akseptere uavhengighet mellom faktorene for de valg av passende avhengighetsmål som betraktes. Vanligvis vil man si at det er ingen relevant ordning mellom yrkesgruppene $A_1,\dots,A_8$, slik at Y har nominalnivå. Når det gjelder kjennetegnene stemte og ikke-stemte vil det avhenge av problemstillingen om man skal betrakte disse som ordnet eller ikke. Hvis valgdeltaking f.eks., brukes som indikator på interessen for valget kan det være meningsfylt å tale om en relevant ordning mellom kjennetegnene. Det vil da foreligge en blandet situasjon. Siden B rimeligvis er den primære faktor, vil, ut fra betraktningene i III.7, γ (definert ved (51)) være et anvendelig mål i dette tilfellet. Målet for grad av avhengighet blir altså γ^2, og n.u. hypotesen er:

$$H_1^* : \gamma^2 \leq 0.0025 .$$

Vi finner $\hat{\gamma} = 0.0146$ og $\hat{\gamma}^2 = 0.0002$.
Siden $\hat{\gamma}^2 < 0.0025$ ser vi at n.u. hypotesen aksepteres. Dvs. vi aksepterer at faktorene er tilnærmet uavhengige. (Uttrykket: "akseptere" betyr i denne forbindelse: "unnlate å forkaste".) Estimatoren for den asymptotiske variansen til $\sqrt{n}\hat{\gamma}$ blir:

$$S_\gamma^2 = 5.577 .$$

Konfidensintervallet for γ med asymptotisk konfidensgrad lik 0.95 blir:

$$-0.0744 < \gamma < 0.1036.$$

Vi ser at $2|\hat{\gamma}|\,\frac{S_\gamma}{\sqrt{n}} = 0.00133$, slik at et 95%-intervall for γ^2 (75) blir:

$$0 < \gamma^2 < 0.0028.$$

Det ensidige konfidensintervallet (76) med $1-\alpha$ lik 0.95 får nedre grense lik null, slik at alle utvidete hypoteser, $\gamma^2 \leq c$ aksepteres ved nivå $\alpha=0.05$.

La oss betrakte den situasjonen som oppstår hvis vi mener at det ikke er noen relevant ordning mellom stemte og ikke-stemte.

Fremdeles anses B å være den primære faktor. I dette tilfellet has en uordnet asymmetrisk situasjon. Målet bør derfor være konstruert ut fra en asymmetrisk prediksjonsmodell. Anvendelige mål er derfor λ_b eller η_b.
Vi finner $\hat{\lambda}_b = 0$ s.a. alle utvidete hypoteser basert på λ_b aksepteres.
N.u. hypotesen basert på η_b:

$$H_2^* : \eta_b \leq 0.0025 .$$

Resultater: $\hat{\eta}_b = 0.0072$.
Estimert asymptotisk varians: $s_{0b}^2 = 0.0525$.
N-testen med nivå $\alpha=0.05$:
Forkast H_2^* hvis $\dfrac{\sqrt{n}(\hat{\eta}_b-0.0025)}{s_{0b}} > 1.645$.
Vi finner

$$\sqrt{n}\,\frac{(\hat{\eta}_b-0.0025)}{s_{0b}} = 1.07 .$$

Konklusjon: Vi aksepterer H_2^*.
Konfidensintervallet for η_b med $\alpha=0.05$ er gitt ved

$$0 < \eta_b < 0.0158 .$$

Det ensidige intervallet har nedre grense lik null, slik at faktisk alle utvidete hypoteser, $\eta_b \leq c$, aksepteres ved nivå lik 0.05.

Til slutt gis konfidensintervallene for $\kappa_1 = \max\limits_{i,j} |p_{ij}-p_{i.}p_{.j}|$ og $\kappa_2 = \max\limits_{i,j} |\frac{p_{ij}}{p_{i.}} - p_{.j}|$, utledet i III.4.

Resultater: $\hat{D} = \sum\limits_{i,j} (q_{ij}-q_{i.}q_{.j})^2 = 0.000068$

$$s_D^2 = 0.000006 .$$

95%-intervall for κ_1:

$$0 < \kappa_1 < 0.009$$

$$\hat{E} = \sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{2} \left(\frac{q_{ij}}{q_{i.}} - q_{.j}\right)^2 = 0.061790$$

$$S_E^2 = 5.9999 \quad .$$

95%-intervall for κ_2:

$$0 < \kappa_2 < 0.2776 \ .$$

Det er verdt å merke seg at i dette eksempel, er ikke valg av n.u. hypotese noe problem, fordi enhver utvidet hypotese aksepteres uansett hvilket av målene γ, λ_b eller η_b som foretrekkes.

Eksempel 2. I dette eksemplet skal sammenhengen mellom faktorene inntekt og valgdeltaking undersøkes. Vi lar faktor A være (års)-inntekt og faktor B valgdeltaking. Antall observasjoner i undersøkelsen var n=2702.
Resultatet av undersøkelsen, stilt opp i en toveis kontingenstabell, ble:
Tabell 3.

Valgdeltaking / Inntekt	B_1 stemte	B_2 ikke stemte	I alt
A_1: Under kr. 10.000	400	84	484
A_2: kr. 10.000-19.900	517	64	581
A_3: kr. 20.000-29.900	785	68	853
A_4: kr. 30.000-39.900	398	32	430
A_5: kr. 40.000-49.900	194	9	203
A_6: kr. 50.000 og over	145	6	151
I alt	2439	263	2702

Kilde: [16], tabell 11.

For hver inntektsgruppe kan vi beregne andelen som hadde stemt/ikke stemt. Det gir følgende tabell:

Tabell 4.

Inntektsgruppe	Stemte	ikke stemte
A_1	0.83	0.17
A_2	0.89	0.11
A_3	0.92	0.08
A_4	0.93	0.07
A_5	0.96	0.04
A_6	0.96	0.04
Alle inntektsgrupper	0.90	0.10

Kilde: [16], tabell 11.

Andelen som stemte stiger med økende inntekt. Det synes som det er en viss grad av avhengighet tilstede. Vi skal undersøke om graden av avhengighet i tabellen er betydelig. Dvs. om vi kan fastslå betydelig avhengighet, i den forstand at vi forkaster n.u. hypotesen. Den vanlige kji-kvadrat-testen i I.3 (ii) forkaster den eksakte uavhengighetshypotesen på alle nivåer <0.001.

Vi vil anta at det er en relevant ordning mellom B's kjennetegn. Inntekt etablerer opplagt en ordning, slik at det foreligger en ordnet situasjon (se III.3). γ^2 er dermed et passende mål for grad av avhengighet. N.u. hypotesen blir dermed lik H_1^* i eksempel 1:

$$H_1^* : \gamma^2 \leq 0.0025.$$

Vi finner:

$$\hat{\gamma} = -\ 0.3080,\ \hat{\gamma}^2 = 0.0949.$$

Med $\alpha=0.05$ forkastes H_1^* hvis

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\gamma}^2-0.0025)}{2|\hat{\gamma}|\,s_\gamma} > 1.645.$$

Man får: $s_\gamma^2 = 5.329$, $s_\gamma/\sqrt{n} = 0.0444$ og $2|\hat{\gamma}|\,\frac{s_\gamma}{\sqrt{n}} = 0.0274.$

Det gir:

$$\frac{\sqrt{n}(\gamma^2-0.0025)}{2|\hat{\gamma}|\,s} = 3.37\ .$$

Konklusjon: Avhengighet mellom inntekt og valgdeltaking.
95%-konfidensintervaller for γ og γ^2, (71) og (75):

$$- 0.3950 < \gamma < - 0.2210$$

$$0.0412 < \gamma^2 < 0.1486 .$$

Det ensidige konfidensintervallet (76) for γ^2 med $\alpha=0.05$ blir:

$$\gamma^2 > 0.0498.$$

Dvs. at alle hypoteser: $\gamma^2 \leq c$; $c < 0.0498$ blir forkastet ved nivå 0.05 (tiln.)
Som i eksempel 1 skal vi angi 95%-konfidensintervaller for κ_1 og κ_2:
Resultater:

$$\hat{D} = 0.000529, \qquad S_D^2 = 0.000095.$$

Intervall for κ_1: $0.0037 < \kappa_1 < 0.0212$.

$$\hat{E} = 0.025870 , \qquad S_E^2 = 0.1698 .$$

Intervall for κ_2: $0.0293 < \kappa_2 < 0.1439$.

Eksempel 3. Sammenhengen mellom utdanning og partisympati skal undersøkes. La faktoren A være utdanning og B partisympati. Utgangspunktet er fra [16], tabell 27, men vi har ikke tatt med de 26 som stemte, men ikke oppga hvilket parti de stemte på. Dessuten er stemmene til SF og K slått sammen. Resultatet av undersøkelsen, uttrykt ved cellehyppighetene X_{ij}, ble:

Tabell 5.

Utdanning \ Parti	SF/K	A	V	Sp	Kr.F.	H	Ialt
A_1: Folkeskole	35	748	72	152	107	101	1215
A_2: Ungdoms-skole	11	322	71	103	71	171	749
A_3: Gymnas	8	93	44	39	26	97	307
A_4: Universitet & Høgskole	8	16	21	11	21	65	142
I alt	62	1179	208	305	225	434	n=2413

Kilde: [16], tabell 27.

På hvert utdanningsnivå beregner vi andelen som hadde stemt på de forskjellige partiene. Det gir følgende tabell:

Tabell 6.

Utdanningsnivå	SF/K	A	V	Sp	Kr.F.	H
Folkeskole	0.03	0.62	0.06	0.12	0.09	0.08
Ungdoms-skole	0.01	0.43	0.095	0.14	0.095	0.23
Gymnas	0.03	0.30	0.14	0.13	0.08	0.31
Universitet & Høgskole	0.06	0.11	0.15	0.08	0.15	0.46
Alle utdanningsnivåer	0.03	0.49	0.09	0.13	0.09	0.18

Det kan ikke være noen tvil om at det er klar sammenheng mellom utdanningsnivå og partisympati. Kji-kvadrat-testen forkaster den eksakte uavhengighetshypotesen ved alle vanlige nivåer.

Det synes å være flere alternative måler å tolke situasjonen på i dette eksemplet. Det er klart at det vanligvis er en relevant ordning mellom utdanningsnivåene. Dersom partisympati indikerer politisk retning på skalaen: ventreorientert-høyreorientert, er det også meningsfylt å si at det er en ordning mellom partiene i den foran nevnte betydning. I tabellene 5 og 6 er partiene ordnet (subjektivt etter 1969 nivå) på en slik skala. Aktuelle, relevante avhengighetsmål er ordinalinvariante mål, og γ^2 velges dermed som mål for grad av avhengighet. N.u. hypotesen er:

$$H_1^* : \gamma^2 \leq 0.0025 .$$

Vi finner

$$\hat{\gamma} = 0.3720 , \qquad \hat{\gamma}^2 = 0.1384$$

$$S_\gamma^2 = 1.260 , \qquad S_\gamma/\sqrt{n} = 0.0229 , \qquad \frac{2|\hat{\gamma}|S}{\sqrt{n}} = 0.0170.$$

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\gamma}^2-0.0025)}{2|\hat{\gamma}|S_\gamma} = 7.99 .$$

Konklusjon: Utdanning og partisympati er avhengige.
95%-konfidensintervaller for γ og γ^2, (71) og (75):

$$0.3271 < \gamma < 0.4169$$
$$0.1051 < \gamma^2 < 0.1717 .$$

Det ensidige 95%-intervallet (76) blir:

$$\gamma^2 > 0.1104 .$$

Dvs. at alle hypoteser $\gamma^2 \leq c$ hvor $c < 0.1104$ forkastes ved nivå lik 0.05.

Det er klart at ovenstående tolkning av situasjonen ikke nødvendigvis alltid er den mest relevante. Dersom det ut fra den gitte problemstilling er ønskelig å betrakte partiene uten ordning, men utdanningsnivåene ordnet, vil situasjonen være blandet. Det synes rimelig å betrakte situasjonen asymmetrisk med B som den primære faktor, slik at λ_b eller η_b vil være naturlige valg. La oss velge η_b som mål for grad av avhengighet. N.u. hypotesen er:

$$H_2^* : \eta_b \leq 0.0025 .$$

Resultater: $\hat{\eta}_b = 0.0513$, $S_{0b}^2 = 0.0763$.

N-testen med nivå $\alpha=0.05$ for H_2^*: Forkast H_2^* hvis

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\eta}_b-0.0025)}{S_{0b}} > 1.645 .$$

Vi får: $\dfrac{\sqrt{n}(\hat{\eta}_b-0.0025)}{S_{0b}} = 8.71$.

Konklusjon: Vi forkaster H_2^* (ved nivåer forsvinnende små: < 0.00001).

Videre finner man:

$$\hat{\lambda}_b = 0.0430 .$$

Estimert asymptotisk varians for $\sqrt{n}\hat{\lambda}_b$: $S_b^2 = 0.4030$.

Herav fås tosidige 95%-konfidensintervaller for η_b og λ_b:

$$0.0403 < \eta_b < 0.0623$$

$$0.0177 < \lambda_b < 0.0683 .$$

Ensidige 95%-intervaller for η_b og λ_b blir

$$\eta_b > 0.0421$$
$$\lambda_b > 0.0218 .$$

Dette gir at alle hypoteser, $\eta_b \leq c$; $c < 0.0421$ forkastes, og tilsvarende vil alle hypoteser, $\lambda_b \leq c$, $c < 0.0218$ bli forkastet.

Vi vil som en tredje alternativ tolkning betrakte situasjonen som uordnet og symmetrisk. Anvendelige avhengighetsmål vil da være λ og η.
Resultater:

$$\hat{\eta} = 0.0517$$

$$\hat{\lambda} = 0.0506$$

$$S_{\eta}^2 = 0.0742$$

$$S_{\lambda}^2 = 0.2101 \quad .$$

Ensidige 95%-konfidensintervaller for η og λ er gitt ved:

$$\eta > 0.0425$$

$$\lambda > 0.0353 \quad .$$

Tosidige 95%-konfidensintervaller for η og λ blir:

$$0.0407 < \eta < 0.0627$$

$$0.0324 < \lambda < 0.0688 \quad .$$

Tilslutt angis 95%-intervaller for κ_1 og κ_2:

$$0.0167 < \kappa_1 < 0.1059$$

$$0.1012 < \kappa_2 < 0.6236 \quad .$$

APPENDIKS A

La oss betrakte den multinomiske situasjonen fra I.2. Følgende hypotese skal testes:

$$H_o: p_i = \phi_i(\theta_1,\dots,\theta_m) \text{ for } i=1,\dots,r$$

hvor ϕ_i har kontinuerlige partielle deriverte av annen orden. Kji-kvadrat-testene for Ho (s.5.(10) og (11) er gitt ved:

Test 1: Forkast H_o når $Z_{1n} = \sum_{i=1}^{r} \frac{(X_i - n\phi_i(\tilde{\theta}))^2}{n\phi_i(\tilde{\theta})} > z(r-1-m,\varepsilon) = z_o$

Test 2: Forkast H_o når $Z_{2n} = \sum_{i=1}^{r} \frac{(X_i - n\phi_i(\tilde{\theta}))^2}{X_i} > z(r-1-m,\varepsilon) = z_o$

Her er $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1,\dots,\tilde{\theta}_m)$, hvor $\tilde{\theta}_i$ er BAN-estimator av type A, B eller C. Konsistensegenskapen for testene 1 og 2 følger nå fra Neyman ([15]; (171), s.268). Nå er H_o av en annen form enn hypotesen testet av Neyman (se[15], s.259). men det vil ikke spille noen rolle for beviset av (171). La oss imidlertid gjennomføre et enklere bevis for konsistensegenskapen til testene 1 og 2. Først trenger vi to kjente resultater.

Setn. A

(a) $X_n \xrightarrow{P} a$, a reelt tall <=> $X_n \xrightarrow{D} a$.

(b) (Slutskys setning). La g være en kontinuerlig funksjon i k variable, og anta X_{in}, n=1,2,... og X_i er tilfeldige variable slik at $X_{in} \xrightarrow{P} X_i$ for i=1,...,k. Da vil $g(X_{1n},\dots,X_{kn}) \xrightarrow{P} g(X_1,\dots,X_k)$.

Setn. 1. *Kji-kvadrat-testene 1 og 2 for H_o er konsistente.*

Bevis: Det må vises at for enhver p inkonsistent med Ho så vil

$$\lim_{n\to\infty} P_p(Z_{1n} > z_o) = \lim_{n\to\infty} P_p(Z_{2n} > z_o) = 1.$$

La p^o være et vilkårlig punkt slik at H_o ikke gjelder.
Vi ser at

$$Z_{1n} = n \cdot V_1(q_n) \quad \text{og} \quad Z_{2n}(q_n) = n \cdot V_2(q_n)$$

hvor

$$V_1(q_n) = \sum_{i=1}^{r} \frac{(q_{in}-\phi_i(\tilde{\theta}))^2}{\phi_i(\tilde{\theta})}$$

og

$$V_2(q_n) = \sum_{i=1}^{r} \frac{(q_{in}-\phi_i(\tilde{\theta}))^2}{q_{in}}$$

La oss først betrakte Z_{1n}. Siden $\tilde{\theta}_t$ er BAN-estimator for θ_t has at

$$\tilde{\theta}_t \xrightarrow{P} \theta_t, \text{ for } t=1,\dots,m.$$

og dermed : $\phi_i(\tilde{\theta}) \xrightarrow{P} \phi_i(\theta)$ fra setn. A (b).

Herav følger, siden $q_{in} \xrightarrow{P} p_i^o$ for $i=1,\dots,r$ at

$$V_1(q_n) \xrightarrow{P} \sum_{i=1}^{r} \frac{(p_i^o-\phi_i(\theta))^2}{\phi_i(\theta)} = a$$

fordi V_1 er en kontinuerlig funksjon i q_n.
Siden Ho ikke er sann, eksisterer k slik at $p_k^o \neq \phi_k(\theta)$, hvilket gir $a > 0$. Det følger nå at

$$V_1(q_n) - a \xrightarrow{P} 0 \quad \text{og dermed vil}$$

$$V_1(q_n) - a \xrightarrow{D} 0, \text{ dvs.}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\,(V_1(q_n)-a \leq x) = \begin{cases} 0 \text{ for } x < 0 \\ 1 \text{ for } x > 0 \end{cases}$$

Dette er igjen ekvivalent med

$$\lim_{n\to\infty} P\,(V_1(q_n)-a > x) = \begin{cases} 1 \text{ for } x < 0 \\ 0 \text{ for } x > 0 \end{cases}$$

La $\qquad 0 < \varepsilon < a.$

Da has at:

$$V_1(q_n) - a > -\varepsilon \iff \frac{Z_{1n}-na}{n} > -\varepsilon \iff Z_{1n} > n(a-\varepsilon) = nc;\; c > 0$$

Herav:

$$\lim_n P(Z_{1n} > nc) = \lim_n P(V_1(q_n) - a > -\varepsilon) = 1$$

Siden $c > 0$ eksisterer N slik at for $n \geq N$ så vil $nc > z_o$.

Dette gir:

$$\text{For } n \geq N : P(Z_{1n} > z_o) \geq P(Z_{1n} > nc)$$

og dermed $\lim_{n\to\infty} P(Z_{1n} > z_o) \geq \lim_{n\to\infty} P(Z_{1n} > nc) = 1$

Altså er χ^2-testene 1 konsistente.

For χ^2-testene 2 går beviset helt analogt, siden

$$V_2(q_n) \overset{P}{\to} \sum_{i=1}^{r} \frac{(p_i^o - \phi_i(\theta))^2}{p_i^o} = b > 0$$

Dermed følger at for $0 < \varepsilon < b$, så vil

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_{2n} > n(b-\varepsilon)) = 1$$

Dette medfører, som ovenfor at

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_{2n} > z_o) = 1$$

Q.E.D.

APPENDIKS B

I dette appendikset gis beviser for teoremer og lemmaer i kapitel II, som ikke er bevist før.

La oss for ordens skyld gjengi betingelsen (23) som er tilstrekkelig for å anvende teorien fra Neyman ([15] , kap.4):
Det eksisterer $\theta_1,\dots,\theta_{r-2}$ og funksjoner $f_1,\dots,f_r$ slik at $p_i = f_i(d,\theta_1,\dots,\theta_{r-2})$ og f_i har kontinuerlige partielle deriverte av annen orden for $i = 1,\dots r$. Her er d avstandsmålet fra punktet p til den idealiserte hypotesen (betegnet med ζ i II.1)

LEMMA 1. (s.12)

La p^o være et fast kjent parameterpunkt, og anta $d(p)= \sum_{i=1}^{r} (p_i-p_i^o)^2$
Da eksisterer (polarkoordinater) $\theta_1,\dots,\theta_{r-2}$ og funksjoner $f_1,\dots,f_r$ slik at (23) holder.

Bevis: La $\mu_i = p_i-p_i^o$ for $i=1,\dots,r$. Da er $d = \sum_{i=1}^{r} \mu_i^2$ og $\sum_{i=1}^{r} \mu_i = 0$

$\mu_1,\dots, \mu_r$ kan uttrukkes på polarkoordinat form:

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \sqrt{d} \sin \theta_o \\
\mu_2 &= \sqrt{d} \cos \theta_o \sin \theta_1 \qquad\qquad (*)\\
&\vdots \\
\mu_{r-1} &= \sqrt{d} \cos \theta_o \cos \theta_1 \dots \cos \theta_{r-3} \sin \theta_{r-2} \\
\mu_r &= \sqrt{d} \cos \theta_o \cos \theta_1 \dots \cos \theta_{r-3} \cos \theta_{r-2}
\end{aligned}$$

hvor $-\frac{\pi}{2} \le \theta_o \le \frac{\pi}{2}$ slik at $\cos \theta_o \ge 0$.

Definer $a(\theta_1,\dots\theta_{r-2}) = \sin \theta_1 + \cos\theta_1 \sin\theta_2 +\dots+ \cos\theta_1 \dots \cos\theta_{r-3} \sin\theta_{r-2} + \cos \theta_1 \dots \cos \theta_{r-2}$ og la $\theta = (\theta_1,\dots,\theta_{r-2})$. Anta først at

$a(\theta) \neq 0$ og $d > 0$.

Av (*) får vi følgende resultat:

$$\cos \theta_o = \frac{-\sin \theta_o}{a(\theta)} \quad ; \text{ siden } \sum_{i=1}^{r} \mu_i = 0.$$

Dette gir:

$$\cos^2\theta_o = \frac{1-\cos^2\theta_o}{a^2(\theta)} \quad \text{og dermed}$$

$$\cos^2\theta_o = \frac{1}{1+a^2(\theta)}$$

Herav fås, siden $\cos\theta_o \geq 0$

$$\cos\theta_o = \frac{1}{\sqrt{1+a^2(\theta)}} \qquad \binom{*}{*}$$

Videre følger at: $\sin\theta_o = -\cos\theta_o . a(\theta) = -\dfrac{a(\theta)}{\sqrt{1+a^2(\theta)}}$. $\begin{pmatrix}*\\ *\\ *\end{pmatrix}$

Anta nå at $a(\theta) = 0$. Fremdeles vil $\sin\theta_o = -\cos\theta_o a(\theta)$

slik at $\sin\theta_o = 0 = \dfrac{a(\theta)}{\sqrt{1+a^2(\theta)}}$

$$\cos\theta_o = 1 = \frac{1}{\sqrt{1+a^2(\theta)}} .$$

Dvs. $\binom{*}{*}$ og $\begin{pmatrix}*\\ *\\ *\end{pmatrix}$ holder for alle verdier av $a(\theta)$ og $d > 0$.

La nå $f_1,\ldots,f_r$ være funksjoner av $(d,\theta))$ gitt ved:

$$f_1(d,\theta_1,\ldots,\theta_{r-2}) = p_1^o - \frac{\sqrt{d}\, a(\theta)}{\sqrt{1+a^2(\theta)}}$$

$$f_2(d,\theta,\ldots,\theta_{r-2}) = p_2^o + \sqrt{\frac{d}{1+a^2(\theta)}}\ \sin\theta_1$$

$$\vdots$$

$$f_{r-1}(d,\theta_1,\ldots,\theta_{r-2}) = p_{r-1}^o + \sqrt{\frac{d}{1+a^2(\theta)}}\ \cos\theta_1\ldots\cos\theta_{r-2}$$

$$f_r(d,\theta_1,\ldots,\theta_{r-2}) = 1 - \sum_{i=1}^{r-1} f_i(d,\theta_1,\ldots,\theta_{r-2})$$

Det sees lett at alle f_i har kontinuerlige partielle deriverte av annen orden og $p_i = p_i^o + \mu_i = f_i(d,\theta)$ for $i=1,\ldots r$.

Hvis $d=0$ så vil $p_i = p_i^o$ og siden $f_i = p_i^o$ for $i=1,\ldots,r$ i dette tilfelle, har vi følgende:

$$p_i = f_i(d,\theta) \quad \text{for } i=1,\ldots r \text{ for alle verdier av } \theta \text{ og } d \geq 0$$

Q.E.D.

Det fundamentale resultat i kapitel II er teorem 1 om grensefordelingen til $\sqrt{n}\,\frac{(\hat{d}_n - d)}{\sigma_d}$ og $\sqrt{n}\,\frac{(\hat{d}_n - d)}{S_d}$.

Beviset krever utstrakt kjennskap til teorien om grensesetninger. Foruten setn. A, vil følgende kjente grensesetninger (B-F) bli brukt (se f.eks. [17], 2c).

Setn. B. La f være en kontinuerlig funksjon i to variable. Anta $\{X_n\}$ og $\{Y_n\}$ er to følger av tilfeldige variable, og X er tilfeldig variabel. Anta $X_n \xrightarrow{D} X$ og $Y_n \xrightarrow{P} c$, hvor c er reelt tall. Da vil

$$f(X_n, Y_n) \xrightarrow{D} f(X, c)$$

For bevis refereres til Torgersens notat fra S 70, våren 1971: Cramér's Rules.) Herav fås spesielt Cramér's regler:

(a) $X_n \xrightarrow{D} X,\ Y_n \xrightarrow{P} 0 \Rightarrow X_n Y_n \xrightarrow{D} 0$

(b) $X_n \xrightarrow{D} X,\ Y_n \xrightarrow{P} c \Rightarrow X_n \pm Y_n \xrightarrow{D} X \pm c,\ X_n Y_n \xrightarrow{D} cX,\ X_n / Y_n \xrightarrow{D} X/c$ for $c \neq 0$.

(c) $X_n - Y_n \xrightarrow{P} 0\ \&\ Y_n \xrightarrow{D} Y \Rightarrow X_n \xrightarrow{D} Y$.

Setn. C. Lindberg-Levy's sentral-grense teorem. La $X_1, X_2, \ldots$ være en følge av uavhengige og identisk fordelte (forkortes til :uif.) tilfeldige variable med $EX_n = \mu$ og var $X_n = \sigma^2$ for alle n. Da vil

$$Y_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

hvor $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Setn. D. $F_n \xrightarrow{D} F$, F kontinuerlig $\Rightarrow F_n(x) \to F(x)$ uniformt i x. (dvs. $\sup_x |F_n(x) - F(x)| \to 0$)

Setn. E. Multivariabelt sentral-grense teorem.

La F_n være simultan fordelingsfunksjon til den k-dimensjonale variabel $(X_n^{(1)}, \ldots, X_n^{(k)})$ for n=1,2,..., og la F være simultan fordelingsfunksjon til $X^{(1)}, \ldots, X^{(k)}$. Dvs. $F_n(x_1, \ldots, x_k) = P(X_n^{(1)} \leq x_1, \ldots, X_n^{(k)} \leq x_k)$ og

$F(x_1,\ldots,x_n) = P(X^{(1)} \leq x_1,\ldots,X^{(k)} \leq x_k)$. La $F_{\lambda n}$ være fordelingsfunksjonen til $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i X_n^{(i)}$ (på matriseform : $\lambda'\mathbf{X}_n$ hvor $\lambda' = (\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$ og $X_n' = (X_n^{(1)},\ldots,X_n^{(k)})$), λ_i er reelle tall, for $i=1,\ldots,k$. Tilsvarende er F_λ fordelingsfunksjonen til $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i X^{(i)}$. Da vil

$$F_n \xrightarrow{D} F \iff F_{\lambda n} \xrightarrow{D} F_\lambda \quad (\text{dvs. } \lambda' X_n \xrightarrow{D} \lambda'\mathbf{X})$$

for alle vektorer $\lambda' = (\lambda_1,\ldots,\lambda_k) \in R^k$.

(R^k er det k-dimensjonale euklidske rommet : $R^k = \{(x_1,\ldots x_k) \mid x_i \text{ er reell}\}$

Setn. F.

Anta $U_n = (U_{1n},\ldots,U_{kn})$ for $n=1,2,\ldots$ er uif. k-dimensjonale tilfeldige variable, og at første og annen-ordens momenter eksisterer. La $\mu = EU_n$, $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_k)$ og Σ er covariansmatrisen til U_n. Sett $\bar{U}_n = (\bar{U}_{1n},\ldots,\bar{U}_{kn})$. for $n=1,2,\ldots$, hvor $\bar{U}_{in} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} U_{ij}$.

Da vil

$$\sqrt{n}\,(\bar{U}_n-\mu) \xrightarrow{D} U \sim N_k(0,\Sigma)$$

hvor $N_k(0,\Sigma)$ er den k-dimensjonale multinormale fordeling med forventning 0 og covariansmatrise Σ.

Vi trenger noen enkle anvendelser av disse setningene.

Korollar A. La Y_n være en tilfeldig variabel med fordelingsfunksjon F_n for $n=1,2,\ldots$.. Anta at $Y_n \xrightarrow{D} N(0,1)$. og la $\{x_n\}$ være en følge av reelle tall. Da vil

$$F_n(x_n) - \Phi(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Bevis: Φ er kontinuerlig. Fra setn. D vil $\sup_x \mid F_n(x) - \Phi(x) \mid \underset{n\to\infty}{\to} 0$

La $\varepsilon > 0$ være gitt. Da eksisterer N, slik at for $n \geq N$, så vil

$$\mid F_n(x) - \Phi(x) \mid < \varepsilon \text{ for alle } x.$$

Spesielt vil dette holde for $x \in \{x_N, x_{N+1}, \ldots,\}$ dvs.

$$| F_n(x_n) - \Phi(x_n) | < \varepsilon \text{ for } n \geq N \qquad Q.E.D.$$

Korollar B. La $X_1, X_2, \ldots$ være en følge av uif. tilfeldige variable hvor $EX_n = \mu$ og var $X_n = \sigma^2$ eksisterer. For tilstrekkelig store n kan fordelingen for $\bar{X}_n$ approksimeres med normalfordelingen med forventning μ og varians $\frac{\sigma^2}{n}$.

Bevis: Følger fra setn.C og setn.D. La $\varepsilon > 0$ være gitt. Da eksisterer N, slik at for $n \geq N$ så vil $\left| P\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq x\right) - \Phi(x) \right| < \varepsilon$ for alle x.

La Y_n være en tilfeldig variabel og $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ med fordelingsfunksjon $G_n(y) = \Phi(\frac{y-\mu}{\sigma}\sqrt{n})$ og la F_n være fordelingsfunksjonen til $\bar{X}_n$.

Da vil for $n \geq N$

$$| F_n(x) - G_n(x) | = \left| P\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\right) - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\right) \right| < \varepsilon \text{ for alle } x$$

Q.E.D

Resultatet som gjør at vi er istand til å bevise teorem 1, er hovedsakelig setn. (ii) i Rao, [17] , 6a.2, s.321. Rao bruker imidlertid begrepet "totally differentiable" som ikke er alment kjent. Setningen vil derfor her bli vist i en noe annen versjon, som allikevel er tilstrekkelig for vårt problem.

Setn. G. La T_n være en k-dimensjonal observator (tilfeldig variabel) $(T_{1n}, \ldots, T_{kn})$ slik at

$$\sqrt{n}\,(T_n - \theta) = \{\sqrt{n}(T_{1n} - \theta_1), \ldots, \sqrt{n}(T_{kn} - \theta_k)\} \xrightarrow{D} N_k(0, \Sigma)$$

hvor Σ er en kovariansmatrise med elementer $\sigma_{ij}(\theta)$ for $i=1,\ldots,k$ og $j=1,\ldots,k$. La videre g være en funksjon i k variable med kontinuerlige partielle deriverte. Da vil

1) $\sqrt{n}\, U_n = \sqrt{n}\, [g(T_n) - g(\theta)] \xrightarrow{D} N(0, \sqrt{v(\theta)})$

såfremt $\nu(\theta) \neq 0$, hvor

$$\nu(\theta) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \sigma_{ij}(\theta) \frac{\partial g}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial \theta_j} .$$

2) Hvis σ_{ij} er en kontinuerlig funksjon av θ for $i=1,\dots,k$ og $j=1,\dots,k$ og $\nu(\theta) \neq 0$ så vil

$$\frac{\sqrt{n}\, U_n}{\sqrt{\nu(T_n)}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

Bevis:

(i) Fra setn. E(Multivariabelt sentral-grense teorem): $\sqrt{n}(T_{in}-\theta_i) \xrightarrow{D} N(0,\sigma_{ii})$ for $i=1,\dots,k$. Dette ses ved å sette $\lambda_i=1$, og $\lambda_j=0$ for $j\neq i$ i setn.E.

(ii) Ved Taylor's rekkeutvikling finner vi

$$g(T_{1n},\dots,T_{kn}) = g(\theta_1,\dots,\theta_k) + \sum_{i=1}^{k} (T_{in}-\theta_i) \frac{\partial g}{\partial \theta_i} + \sum_{i=1}^{k} (T_{in}-\theta_i)\varepsilon_{ni} \quad \text{hvor}$$

$$\varepsilon_{ni} = \left(\left.\frac{\partial g}{\partial x_i}\right|_{x = \Delta\theta + (1-\Delta)T_n} - \left.\frac{\partial g}{\partial x_i}\right|_{x = \theta} \right)$$ er en tilfeldig variabel og $|\Delta| \leq 1$.

Siden de partielle deriverte er kontinuerlige så vil

$$\varepsilon_{ni} \to 0 \text{ når } T_{in} \to \theta_i \text{ for } i=1,\dots,k.$$

Dvs.: La $e > 0$, da eksisterer $\delta > 0$ slik at

$$| T_{in} - \theta_i | < \delta \Rightarrow | \varepsilon_{ni} | < e, \text{ for } i=1,\dots,k.$$

(iii) $\quad T_{in} \xrightarrow{P} \theta_i$, for $i=1,\dots,k$.

Bevis for (iii): La $\varepsilon > 0$: $P(|T_{in}-\theta_i| \leq \varepsilon) = P\left(\frac{\sqrt{n}|T_{in}-\theta_i|}{\sigma_{ii}} \leq \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma_{ii}}\right)$

Fra korollar A og (i) ser vi at

$$P\left(\frac{\sqrt{n}(T_{in}-\theta_i)}{\sigma_{ii}} \leq \pm \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma_{ii}}\right) - \Phi\left(\pm \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma_{ii}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Nå vil $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma_{ii}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ og $\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma_{ii}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. og dette medfører at

$$P\left(\frac{\sqrt{n}\,|T_{in}-\theta_i|}{\sigma_{ii}} \le \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma_{ii}}\right) \underset{n\to\infty}{\to} 1-0 = 1.$$

Siden $\varepsilon > 0$ vilkårlig så vil $P(|Tin-\theta_i|<\delta) \underset{n\to\infty}{\to} 1$ for alle $\delta > 0$.

(iv) $P(|\varepsilon_{ni}| < e) > P(|T_{in}-\theta_i|<\delta)$ fra (ii). Den siste sannsynligheten har grense 1. Siden $e > 0$ er vilkårlig valgt, vil $\varepsilon_{ni} \overset{P}{\to} 0$ for $i=1,\dots,k$.

(v) Fra (i) og (iv) har vi at $\sqrt{n}(T_{in}-\theta_i) \overset{D}{\to} X_i \sim N(0,\sigma_{ii})$ og $\varepsilon_{ni} \overset{P}{\to} 0$.

Ved å anvende setn.B, Cramér's regel (a) fås dermed at $\sqrt{n}(T_{in}-\theta_i)\varepsilon_{ni} \overset{P}{\to} 0$, for $i=1,\dots,k$. Slutskys setning gir oss at

$$\sum_{i=1}^{k} \sqrt{n}(T_{in}-\theta_i)\,\varepsilon_{ni} \overset{P}{\to} 0.$$

(vi) (ii) og (v) $=>$ $\sqrt{n}U_n - \sum_{i=1}^{k} \sqrt{n}(Tin-\theta_i)\frac{\partial g}{\partial\theta_i} \overset{P}{\to} 0$

Vi ser at siste leddet er en lineær kombinasjon av $\sqrt{n}(T_{in}-\theta_i)$ for $i=1,\dots,k$

og setn.E gir oss at $\sum_{i=1}^{k} \sqrt{n}(T_{in}-\theta_i)\frac{\partial g}{\partial\theta_i} \overset{D}{\to} N(0,\nu(\theta))$ såfremt $\nu(\theta) \neq 0$ hvor

$$\nu(\theta) = \left(\frac{\partial g}{\partial\theta}\right)'\Sigma\left(\frac{\partial g}{\partial\theta}\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\sigma_{ij}(\theta)\,\frac{\partial g}{\partial\theta_i}\cdot\frac{\partial g}{\partial\theta_j} \quad ; \quad \left(\frac{\partial g}{\partial\theta}\right)' = \left(\frac{\partial g}{\partial\theta_1},\dots,\frac{\partial g}{\partial\theta_k}\right)$$

(vii)

Fra setn. B(c) og (vi) følger nå at $\sqrt{n}U_n \overset{D}{\to} X \sim N(0,\sqrt{\nu(\theta)})$. Hermed er (1) bevist.

(viii) Hvis σ_{ij} er en kontinuerlig funksjon for $i=1,\dots,k$ og $j=1,\dots,k$ så vil ν også være en kontinuerlig funksjon i k variable. Slutskys setning gir dermed at $\nu(T_{1n},\dots T_{kn}) \overset{P}{\to} \nu(\theta_1,\dots,\theta_n)$ siden $T_{in} \overset{P}{\to} \theta_i$, for $i=1,\dots,k$ fra (iii) ovenfor.
Ved å anvende setn.B får vi derfor følgende:

$$\frac{\sqrt{n}U_n}{\sqrt{\nu(T_n)}} \overset{D}{\to} \frac{X}{\sqrt{\nu(\theta)}} \sim N(0,1). \qquad \textit{Q.E.D}$$

Setn. G setter oss nå istand til å bevise teorem 1.
La $p = (p_1,\dots,p_r)$. Videre la d være en funksjon i r variable med kontinuerlige partielle deriverte, d er ikke nødvendigvis ikke-negativ. Situasjonen er ellers den samme som i II.2.

TEOREM 1. (s.13). Anta det eksisterer i slik at $a_i \neq \bar{a}$. Da vil

$$1) \quad \frac{\sqrt{n}(\hat{d}_n - d(p))}{\sigma_d} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

og

$$2) \quad \frac{\sqrt{n}(\hat{d}_n - d(p))}{S_d} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

Bevis:

Vi definerer følgende r-dimensjonale tilfeldige variabel:

$U_n = (U_{1n},\ldots,U_{rn})$ hvor

$$U_{in} = \begin{cases} 1 & \text{hvis i.te kjennetegn opptrer i n'te forsøk.} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$EU_{in} = p_i$, var $U_{in} = \sigma_{ii}(p) = p_i(1-p_i)$ og $\mathrm{cov}(U_{in},U_{jn}) = \sigma_{ij}(p) = -p_i p_j$.

Dvs. U_1, $U_2,\ldots$ er uif. tilfeldige variable med forventning p

og kovariansmatrise $\Sigma = \{\sigma_{ij}(p)\}$.

Videre ser vi at $\bar{U}_{in} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_{ik} = \frac{X_i}{n} = q_{in}$

og dermed $\bar{U}_n = (\bar{U}_{1n},\ldots,\bar{U}_{rn}) = (q_{1n},\ldots,q_{rn}) = q_n$

U_n tilfredsstiller betingelsene i setn.F. Det medfører at

$$\sqrt{n}(\bar{U}_n - p) = \sqrt{n}(q_n - p) = (\sqrt{n}(q_{1n}-p_1),\ldots\sqrt{n}(q_{rn}-p_r)) \xrightarrow{D} N_r(0,\Sigma).$$

Betingelsene i setn.G er dermed oppfylt med $T_n = q_n + \theta = p$
og $g = d$. Dessuten er

$$\nu(p) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \sigma_{ij}(p)\frac{\partial d}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial d}{\partial p_j} = \sum_{i=1}^{r} p_i(1-p_i)\,a_i^2 - \sum_{i\neq j} p_i p_j a_i a_j$$

Enkel utregning gir

$$\nu(p) = \sum_{i=1}^{r} p_i(a_i-\bar{a})^2 = \sigma_d^2 \quad \text{(iflg. (24) i II.2.(i).)}$$

Siden minst en $a_i \neq \bar{a}$, så vil $\nu(p) > 0$. Dermed har vi fra setn.G-1) at

$$1)\quad \sqrt{n}\,\frac{\hat{d}_n - d(p)}{\sigma_d} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

Dessuten så er σ_{ij} en kontinuerlig funksjon av p for $i=1,\dots,r$ og $j=1,\dots,r$, slik at setn. G-2) kan anvendes, noe som gir at

$$2)\quad \sqrt{n}\,\frac{\hat{d}_n - d}{\sqrt{\nu(q_n)}} = \sqrt{n}\,\frac{\hat{d}_n - d}{s_d} \xrightarrow{D} N(0,1) \qquad \textit{Q.E.D.}$$

Neste resultat som skal bevises er teorem 2, hvor vi eksplisitt finner BAN-estimatorene for $(p_1,.p_r)$ av type D under $H':d(p) = c$.

TEOREM 2(s.14).La $\hat{p} = (\hat{p}_1,\dots\hat{p}_r)$, $\hat{p}_i$ *er BAN-estimatoren for* p_i *under* $H':d(p) = c$, *av type D.*

$$\textit{Da er } Z_1 = \min_{(27)} Q_1 = n \sum_{i=1}^{r} \frac{(q_{in}-\hat{p}_i)^2}{q_{in}} = n\,\frac{(\hat{d}_n-c)^2}{s_d^{\,2}}$$

Bevis: I følge betraktningene på s.14 skal $Q_1 = n \sum_{i=1}^{r} \frac{(q_{in}-p_i)^2}{q_{in}}$ minimeres under bibetingelsene

$$(1)\quad \hat{d}_n + \sum_{i=1}^{r} \hat{a}_i(p_i - q_{in}) = c$$

$$(2)\quad \sum_{i=1}^{r} p_i = 1$$

Vi anvender Lagrange multiplikator-regel, dvs. først minimerer vi uttrykket

$$F(p) = Q_1 + \lambda_1\Big(\sum_{i=1}^{r} p_i - 1\Big) + \lambda_2\Big(\hat{d}_n + \sum_{i=1}^{r} \hat{a}_i(p_i - q_{in}) - c\Big)$$

Det gir: $\hat{p}_i = \hat{p}_i(\lambda_1,\lambda_2)$ for $i=1,\dots,r$. Deretter bestemmer vi λ_1, λ_2 slik at betingelsene (1) og (2) blir tilfredsstilt. Likningene til å bestemme $\hat{p}_i(\lambda_1, \lambda_2)$ er:

$$\frac{\partial F}{\partial p_i} = 0 \Big|_{p = \hat{p}} : \; -\frac{2n}{q_{in}}(q_{in} - \hat{p}_i) + \lambda_1 + \lambda_2 \hat{a}_i = 0 \text{ for } i=1,\dots r.$$

Disse kan uttrykkes på formen:

$$q_{in} - \hat{p}_i = \frac{1}{2n}(\lambda_1 q_{in} + \lambda_2 \hat{a}_i q_{in}) .$$

Herav fås

$$\hat{p}_i = q_{in}\left(1-\frac{\lambda_1}{2n}\right) - \frac{\lambda_2 \hat{a}_i q_{in}}{2n}, \text{ for } i=1,\dots,r.$$

Nå er

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j} = \begin{cases} 2n/q_{in} & \text{for } i=j \\ 0 & \text{for } i\neq j \end{cases}$$

slik at

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{(\partial p_1)^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial p_1 \partial p_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial p_1 \partial p_k} \\ \vdots & \ddots & & \\ \frac{\partial^2 F}{\partial p_k \partial p_1} & & & \frac{\partial^2 F}{(\partial p_k)^2} \end{vmatrix} = \frac{(2n)^k}{q_{1n}\cdot\ldots\cdot q_{kn}} > 0 \text{ for } k=1,\dots,r.$$

Annen derivert-testen for funksjoner i r variable (se [22], s.217) gir dermed at $(\hat{p}_1,\dots\hat{p}_r)$ virkelig er et minimumspunkt for F. Betingelsen (2) gir at

$$\sum_{i=1}^{r} q_{in}\frac{\lambda_1}{2n} = -\frac{\lambda_2}{2n}\sum_{i=1}^{r}\hat{a}_i q_{in} = -\frac{\lambda_2}{2n}\bar{\hat{a}}$$

slik at $\lambda_1 = -\lambda_2 \bar{\hat{a}}$, og

$$(1) \iff \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{r}(\hat{a}_i q_{in}\lambda_1 + \hat{a}_i^2 q_{in}\lambda_2) = \hat{d}_n - c$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \bar{\hat{a}} + \lambda_2 \sum_{i=1}^{r} q_{in}\hat{a}_i^2 = 2n(\hat{d}_n - c)$$

Vi setter inn $\lambda_1 = -\lambda_2 \bar{\hat{a}}$, og får:

$$\lambda_2\left(\sum_{i=1}^{r} q_{in}\hat{a}_i^2 - \bar{\hat{a}}^2\right) = 2n(\hat{d}_n - c)$$

og dermed:

$$\lambda_2 = \frac{2n(\hat{d}_n - c)}{s_d^2} \quad \text{og } \lambda_1 = -\frac{2n\hat{\bar{a}}}{s_d^2}\left[\hat{d}_n - c\right].$$

Dette gir følgende uttrykk for $q_{in} - \hat{p}_i$:

$$q_{in} - \hat{p}_i = \frac{(\hat{d}_n - c)}{s_d^2}(-q_{in}\hat{\bar{a}} + q_{in}\hat{a}_i) = \frac{q_{in}(\hat{a}_i - \hat{\bar{a}})(\hat{d}_n - c)}{s_d^2}$$

Av dette følger nå at

$$Z_1 = \underset{(1) \text{ og } (2)}{\min Q_1} = n\sum_{i=1}^{r} \frac{q_{in}^2(\hat{a}_i - \hat{\bar{a}})^2(\hat{d}_n - c)^2}{q_{in}\, s_d^4} = \frac{n(\hat{d}_n - c)^2}{s_d^4}\sum_{i=1}^{r} q_{in}(\hat{a}_i - \hat{\bar{a}})^2$$

Altså: $Z_1 = n\dfrac{(\hat{d}_n - c)^2}{s_d^2}$.

Q.E.D

For å bevise korollar 1, trenger vi foruten teorem 1 og 2, følgende resultat.

Setn. H. La $X_n \xrightarrow{D} X$. X har kontinuerlig fordelingsfunksjon F. Da vil $P(X_n < x) \underset{n\to\infty}{\to} F(x) = P(X \leq x)$.

Bevis:

La $\{x_k\}$ være en følge slik at $x_k \uparrow x$. Da vil $\lim_{k\to\infty} P(X_n \leq x_k) = P(X_n < x)$ for alle n. Fra setn. D:

Gitt $\varepsilon > 0$, $\exists N$ slik at for $n \geq N$ vil $|F_n(x) - F(x)| < \varepsilon$ for alle x.

Her er $F_n(x) = P(X_n \leq x)$.

Spesielt vil $|F_n(x_k) - F(x_k)| < \varepsilon$ for alle k, som medfører at

$$\lim_{k\to\infty} |F_n(x_k) - F(x_k)| = |P(X_n < x) - F(x)| \leq \varepsilon, \text{ siden F er kontinuerlig.}$$

Dvs. at for gitt $\varepsilon > 0$, $\exists N$ s.a. for $n \geq N$ gjelder

$$|P(X_n < x) - F(x)| \leq \varepsilon$$

Q.E.D.

Korollar 1. Under H' så vil $Z_1 \xrightarrow{D} \chi_1^2$.

Bevis:

La $Y_n = \sqrt{n}\dfrac{(\hat{d}_n - c)}{s_d}$. Fra teorem 2 har vi at $Y_n^2 = Z_1$.

og fra teorem 1: $P(Y_n \leq y) \underset{n\to\infty}{\to} \Phi(y)$. Fra setn. H vil dermed

$P(Y_n < y) \underset{n\to\infty}{\to} \Phi(y)$ for alle y. Dette gir:

$$P(Z_1 \le z) = P(Y_n^2 \le z) = P(-\sqrt{z} \le Y_n \le \sqrt{z}) = P(Y_n \le \sqrt{z}) - P(Y_n < -\sqrt{z})$$

$$\underset{n\to\infty}{\to} P(X \le \sqrt{z}) - P(X \le -\sqrt{z}) = P(-\sqrt{z} \le X \le \sqrt{z}) = P(X^2 \le z), \text{ hvor } X \sim N(0,1)$$

og dermed $X^2 \sim \chi_1^2$. *Q.E.D.*

Styrkefunksjonen til normal-testen har symptotiske egenskaper som er gitt i neste resultat.

TEOREM 3. (s.15)

La $\beta_n(p) = P_p\left(\frac{\sqrt{n}(\hat{d}_n - c)}{S_d} > x(\alpha)\right)$. *Da vil*

$$\lim_n \beta_n(p) = \begin{cases} 0 & \textit{for } d(p) < c \\ \alpha & \textit{for } d(p) = c \\ 1 & \textit{for } d(p) > c \end{cases}$$

Bevis:

a) $d(p) = c$

Da vil $\lim \beta_n(p) = \lim_{n\to\infty} P_p\left(\frac{\sqrt{n}(\hat{d}_n - c)}{S_d} > x(\alpha)\right) = 1 - \Phi(x(\alpha)) = \alpha$

fra teorem 1.

b) $d(p) < c$

Siden $q_{in} \xrightarrow{P} p_i$ og d er kontinuerlig, så vil $\hat{d}_n \xrightarrow{P} d(p)$

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n(p) = P_p\left(\frac{\sqrt{n}(\hat{d}_n - c)}{S_d} > x(\alpha)\right) \le P_p(\hat{d}_n - c > 0)$$

Siden $\hat{d}_n \xrightarrow{P} d(p)$, så vil $\hat{d}_n - d \xrightarrow{D} 0$, dvs.

$$\lim_{n\to\infty} P(\hat{d}_n - d > x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x < 0 \\ 0 & \text{for } x > 0. \end{cases}$$

Nå er $\lim_{n\to\infty} P_p(\hat{d}_n - c > 0) = \lim_{n\to\infty} P_p(\hat{d}_n - d > c-d) = 0$ siden $c-d > 0$.

Altså

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n(p) = 0 \qquad \text{for } d(p) < c.$$

c) d(p) > c

Vi antok at d har kontinuerlige partielle deriverte. Derav følger at S_d er en kontinuerlig funksjon i q_n, slik at fra Slutskys setning så vil

$$S_d \xrightarrow{P} \sigma_d > 0, \text{ siden vi hele tiden har antatt at } a_i \neq \bar{a}$$

for en i og $p_k > 0$ for $k = 1,\dots,r$.

Siden $\hat{d}_n \xrightarrow{P} d$, så har vi at

$$V_n = \frac{\hat{d}_n - c}{S_d} \xrightarrow{P} \frac{d-c}{\sigma_d} = a > 0.$$

Det medfører at $V_n - a \xrightarrow{D} 0$.

La $Y_n = \sqrt{n}\,\dfrac{\hat{d}_n - c}{S_d} = \sqrt{n}\,V_n$. Da vil $V_n - a = \dfrac{Y_n - \sqrt{n}\,a}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} 0$

dvs. at $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\dfrac{Y_n - \sqrt{n}\,a}{\sqrt{n}} > y\right) = \begin{cases} 1 & \text{for } y < 0 \\ 0 & \text{for } y > 0 \end{cases}$

La nå $0 < \varepsilon < a$. Da has at

$$\frac{Y_n - \sqrt{n}\,a}{\sqrt{n}} > -\varepsilon \iff Y_n - \sqrt{n}\,a > -\sqrt{n}\,\varepsilon \iff Y_n > \sqrt{n}\,(a-\varepsilon) = \sqrt{n}\,b; \quad b>0.$$

Herav følger at

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n \geq \sqrt{n}\,b) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{Y_n - \sqrt{n}\,a}{\sqrt{n}} > -\varepsilon\right) = 1.$$

Siden $b > 0$, $\exists N$ slik at for $n \geq N$ så vil $\sqrt{n}\,b > x(\alpha)$.

Dette gir

$$\text{For } n \geq N\text{: } P_p(Y_n > x(\alpha)) \geq P(Y_n > \sqrt{n}\,b)$$

og dermed

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n(p) = \lim_{n\to\infty} P_p(Y_n > x(\alpha)) = 1 \qquad \text{for } d(p) > c. \qquad \textit{Q.E.D.}$$

La oss nå betrakte situasjonen i II.2(ii). Bevis for lemma 3 og teorem 4 skal gis.

LEMMA 3(s.17). *Anta* ϕ_1^n, ϕ_3^n *er asymptotisk ekvivalente tester for hypotesen (34), likeså* ϕ_2^n, ϕ_3^n.

Da vil ϕ_1^n, ϕ_2^n *være asymptotisk ekvivalente.*

Bevis:

Fra definisjon 7, så må vi vise at

$$\lim_n P_\theta(\phi_1^n = 1 \cap \phi_2^n = 0) = \lim_n P_\theta(\phi_1^n = 0 \cap \phi_2^n = 1) = 0 \quad \text{for alle } \theta.$$

La $\theta \in \Omega$ være vilkårlig.

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} P_\theta(\phi_1^n=1 \cap \phi_2^n = 0) = \lim_{n\to\infty} P_\theta(\phi_1^n = 1 \cap \phi_2^n = 0 \cap \phi_3^n = 1)$$

$$+ \lim_{n\to\infty} P_\theta(\phi_1^n = 1 \cap \phi_2^n = 0 \cap \phi_3^n = 0)$$

$$\leq \lim_n P_\theta(\phi_2^n = 0 \cap \phi_3^n = 1) + \lim_n P_\theta(\phi_1^n = 1 \cap \phi_3^n = 0) = 0$$

siden ϕ_2^n og ϕ_3^n er a.e., og ϕ_1^n og ϕ_3^n er a.e.

Lideledes vil

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} P_\theta(\phi_1^n = 0 \cap \phi_2^n = 1) \leq \lim_{n\to\infty} P_\theta(\phi_1^n = 0 \cap \phi_3^n = 1)$$

$$+ \lim_{n\to\infty} P_\theta(\phi_2^n = 1 \cap \phi_3^n = 0) = 0.$$

Q.E.D.

TEOREM 4.(s.18).

La $\beta_{k,n}$ *være styrkefunksjonene for testene i I og II;* $k = 1,2,\ldots 8$. *Anta (26) holder*

Da vil for $k=1,2,..,8$:

$$\lim_{n\to\infty} \beta_{k,n}(p) = \begin{cases} 0 & \textit{for} \quad d(p) < c \\ \alpha & \textit{for} \quad d(p) = c \\ 1 & \textit{for} \quad d(p) > c \end{cases}$$

Bevis:

La $\quad Z_{1n} = n \sum_{i=1}^{r} \frac{(q_{in}-\tilde{p}_i)^2}{\tilde{p}_i}$

og $\quad Z_{2n} = n \sum_{i=1}^{r} \frac{(q_{in}-\tilde{p}_i)^2}{q_{in}}$

hvor $\tilde{p}_i$ er BAN-estimator for p_i av type A, B, C eller D under H': $d(p)=c$ og sett $z_o=z(1,2\alpha)$. La oss først betegne styrkefunksjonene for testene I med β_n^1, og styrkefunksjonene for testene II med β_n^2, dvs.

$$\beta_n^1(p) = P_p(Z_{1n} > z_o \cap \hat{d}_n > c)$$

$$\beta_n^2(p) = P_p(Z_{2n} > z_o \cap \hat{d}_n > c)$$

a) La oss først anta at *$d(p) < c$.*

Da gjelder: $0 \leq \lim_n \beta_n^i(p) \leq \lim_n P_p(\hat{d}_n > c) = \lim_n P_p(\hat{d}_n - d > c-d)$.

Siden $\hat{d}_n - d \xrightarrow{D} 0$ og $c-d > 0$ så er den siste grensesannsynligheten lik null, hvilket gir

$$\lim_n \beta_n^i(p) = 0 \quad \text{for } i=1,2.$$

b) *$d(p) > c$.*

Fra Neyman ([15], lemma 14) har vi at

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_{in} > z_o) = 1 \text{ for } i=1,2 \text{ når } d(p)\neq c.$$

I dette tilfelle vil

$$\lim_{n\to\infty} P(\hat{d}_n > c) = \lim_{n\to\infty} P(\hat{d}_n - d > c-d) = 1 \text{ siden } c-d < 0.$$

La nå A_{in} være begivenheten $\{Z_{in} > z_o\}$ for $i=1,2$,

og la B_n være begivenheten $\{\hat{d}_n > c\}$.

$\lim_{n\to\infty} P(A_{in}) = 1$ og $\lim P(B_n)=1$ og $\beta_n^i(p) = P(A_{in} \cap B_n)$.

Dette gir følgende (for $i=1,2$):

$$1 \geq \lim_{n\to\infty} \beta_n^i(p) = 1 - \lim_n P_p(\overline{A_{in} \cap B_n}) = 1 - \lim_{n\to\infty} P_p(\bar{A}_{in} \cup \bar{B}_n)$$

$$\geq 1 - \lim_n P_p(\bar{A}_{in}) - \lim_n P_p(\bar{B}_n) = 1.$$

Dvs. $\lim_{n\to\infty} \beta_n^i(p) = 1$ for $i=1,2$.

(For en begivenhet A, betegner $\bar{A}$ komplementet til A.)

c) $d(p) = c$.

La oss nå vende tilbake til betegnelsene $\beta_{n,k}$ for styrkefunksjonene, og la $\beta_{8,n}$ være styrkefunksjonen for Test II når $\tilde{p}_i$ er en BAN-estimator for p_i av type D. $\beta_{8,n}$ er da styrkefunksjonen for testen (30), og fra teorem 3 har vi vist at $\lim_{n\to\infty} \beta_{8,n}(p) = \alpha$ når $d(p)=c$, siden (26) er oppfylt. La $Z_n^* = n\dfrac{(\hat{d}_n-c)^2}{s_d^2}$, og la Z_n være en av de 7 andre størrelsene i (32 b) og (33 b) med β_n som styrkefunksjon for tilhørende test for H*.

Dvs. β_n er en av styrkefunksjonene $\beta_{i,n}$, $i=1,\dots,7$.

Vårt mål er å vise at $\lim_{n\to\infty} \beta_n(p) = \alpha$, i såfall har vi vist at $\lim_{n\to\infty} \beta_{i,n}(p) = \alpha$ for $i = 1,\dots,8$.

Lemma 4 gir at $\lim_{n\to\infty} P(Z_n > z_o \cap \hat{d}_n > c \cap Z_n^* \leq z_o) = 0$

og $\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq z_o \cap \hat{d}_n > c \cap Z_n^* > z_o) = 0$

Herav følger: $\lim_{n\to\infty} \beta_n(p) = \lim_{n\to\infty} P_p(Z_n>z_o \cap \hat{d}_n>c) = \lim_{n\to\infty} P_p(Z_n>z_o \cap \hat{d}_n>c \cap Z_n^*>z_o)$

$$+ \lim_n P_p(Z_n>z_o \cap \hat{d}_n>c \cap Z_n^* \leq z_o) = \lim_{n\to\infty} P_p(Z_n>z_o \cap \hat{d}_n>c \cap Z_n^*>z_o).$$

Likeledes vil

$$\lim_{n\to\infty} \beta_{8,n}(p) = \lim P_p(Z_n^*>z_o \cap \hat{d}_n>c) = \lim_n P_p(Z_n^*>z_o \cap \hat{d}_n>c \cap Z_n>z_o).$$

Dette gir: $\lim_n \beta_n(p) = \lim_n \beta_{8,n}(p) = \alpha$

Q.E.D.

Tilslutt i appendiks B vil vi gi et bevis for den asymptotiske egenskapen i teorem 5 for tre-desisjonsprosedyren gitt i II.3.

TEOREM 5.

$$\lim_n P(\textit{minst en gal påstand}) = \begin{cases} \alpha \textit{ for } d=c_1 \text{ eller } d=c_2 \\ 0 \textit{ ellers.} \end{cases}$$

Bevis:

(i) $\hat{d}_n \xrightarrow{D} d$, dvs. at $\lim_n P(\hat{d}_n \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < d \\ 1 & \text{for } x > d \end{cases}$

(ii) $d = c_1$.

Da er: $\lim_n P(\text{minst en gal påstand}) = \lim_n P(\sqrt{n}\,\frac{\hat{d}_n - c_1}{S_d} < -x(\alpha)) +$

$\lim_n P(\sqrt{n}\,\frac{\hat{d}_n - c_2}{S_d} > x(\alpha))$

Nå er: $0 \leq \lim_n P(\sqrt{n}\,\frac{\hat{d}_n - c_2}{S_d} > x(\alpha)) \leq \lim_n P(\hat{d}_n > c_2) = 0$ fra (i) siden $d = c_1 < c_2$.

Dermed: $\lim_n P(\text{minst en gal påstand}) = \lim_n P(\sqrt{n}\,\frac{\hat{d}_n - c_1}{S_d} < -x(\alpha)) = \alpha$, fra

setn. H.

(iii) $d = c_2$.

Analogt med (ii) så har vi: $\lim_n P(\text{minst en gal påstand}) =$

$\lim_n P(\sqrt{n}\,\frac{\hat{d}_n - c_2}{S_d} > x(\alpha)) = \alpha$.

(iv) $c_1 < d < c_2$.

$\lim_n P(\text{minst en gal påstand}) \leq \lim_n P(\hat{d}_n - c_1 < 0) + \lim_n P(\hat{d}_n - c_2 > 0)$

$= \lim_n P(\hat{d}_n < c_1) + \lim_n P(\hat{d}_n > c_2) = 0$ fra (i).

(v) $d < c_1$.

$\lim_n P(\text{minst en gal påstand}) = \lim_n P(\sqrt{n}\,\frac{\hat{d}_n - c_2}{S_d} > x(\alpha)) \leq \lim_n P(\hat{d}_n > c_2) = 0$

fra (i).

(vi) $d > c_2$.

$\lim_n P(\text{minst en gal påstand}) = \lim_n P(\sqrt{n}\,\frac{\hat{d}_n - c_1}{S_d} < -x(\alpha)) \leq \lim_n P(\hat{d}_n < c_1) = 0$ fra(i).

Q.E.D.

APPENDIKS C.

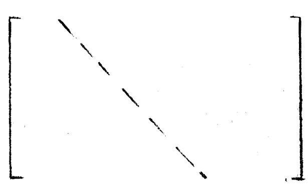
La oss vende tilbake til den situasjonen i kapittel III. Alle lemmaene i III, unntagen lemma 9 og 16, som er vist i [8], skal nå bevises. For notasjoner og forutsetninger henvises til III (spesielt III.1.).

De to første setningene er fra III.3.(iii). Det første, lemma 5, omhandler variasjonsområdet til $\pi_s - \pi_d$. (Stuart, [20], viser et tilsvarende resultat for $P_s - P_d$.)

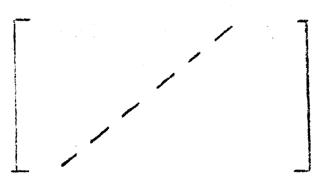
LEMMA 5. (s. 29)

$$-\frac{m-1}{m} \leq \pi_s - \pi_d \leq \frac{m-1}{m}.$$ *Grensene oppnås dersom alle cellesannsynlighetene er lik 0 utenfor en lengste diagonal i tabellen, og lik $\frac{1}{m}$ i diagonalen. $m = \min(v,w)$.*

Bevis: Antall celler i en lengste diagonal er lik m. Anta først at v=m. Da vil $\pi_s - \pi_d$ anta sin maksimumsverdi dersom de positive cellesannsynlighetene er konsentrert i en lengste diagonal av typen:

(1) 

Videre vil $\pi_s - \pi_d$ anta sin minimumsverdi dersom de positive cellesannsynlighetene er konsentrert i en lengste diagonal av typen:

(2) 

Ekstremumsverdiene blir oppnådd hvis cellesannsynlighetene er like i diagonalene (iflg. [20]). Dvs. at $\max(\pi_s - \pi_d)$ inntreffer når $\sum_{i=1}^{m} p_{i,i+k} = 1$ for en k slik at $0 \leq k \leq w-m$, og $p_{i,i+k} = \frac{1}{m}$ for i=1,...,m. Herav fås:

$$\max(\pi_s - \pi_d) = 2\sum_{i=1}^{m-1} p_{i,i+k}\Big(\sum_{i'>i}\ \sum_{j'>i+k} p_{i'j'}\Big) - 2\sum_{i=1}^{m} p_{i,i+k}\Big(\sum_{i'>i}\ \sum_{j'<i+k} p_{i'j'}\Big)$$

$$= 2\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{m}\Big(\sum_{i'>i}\frac{1}{m}\Big) - 2\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{m}\Big(\sum_{i'>i}\ \sum_{j'<i+k} 0\Big) = \frac{2}{m^2}\sum_{i=1}^{m-1}\ \sum_{i'>i} 1$$

$$= \frac{2}{m^2}\{(m-1)+(m-2)+\ldots+1\} = \frac{2}{m^2}\cdot\frac{(m-1)m}{2} = \frac{m-1}{m}.$$

Tilsvarende vil $\min(\pi_s-\pi_d)$ inntreffe når

$$\sum_{i=0}^{m-1} p_{m-i,k+i} = 1 \quad \text{for en } k \text{ slik at } 1 \leq k \leq w-m+1$$

og $\quad p_{m-i,k+i} = \frac{1}{m}$ for $i = 0,1,\ldots,m-1$.

Dette gir at

$$\min(\pi_s-\pi_d) = 2\sum_{i=1}^{m-1} p_{m-i,k+i}\Big(\sum_{i'>m-i}\ \sum_{j'>k+i} p_{i'j'}\Big) -$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} p_{m-i,k+i}\Big(\sum_{i'>m-i}\ \sum_{j'<k+i} p_{i'j'}\Big).$$

Det ses at

$p_{i'j'} = 0$ for $i'>m-i$ og $j'>k+i$ fordi de positive sannsynlighetene er:

$p_{i',k+m-i'}$ og hvis $j'>k+i$, så er $j'>k+m-i'$ siden $i>m-i'$.

Dessuten ses at $\displaystyle\sum_{i'>m-i}\ \sum_{j'<k+i} p_{i'j'} = \sum_{i'>m-i} p_{i',k+m-i'} = \sum_{i'>m-i}\frac{1}{m}$, siden $j'=k+m-i'$
$\Rightarrow j'<k+i$.

Herav: $\quad \displaystyle\min(\pi_s-\pi_d) = -2\sum_{i=1}^{m-1}\ \sum_{i'>m-i}\frac{1}{m^2} = -\frac{2}{m^2}\{1+2+\ldots(m-1)\} = -\frac{m-1}{m}$.

Dersom $w=\min(v,w)$, blir beviset helt analogt. Forskjellen er bare den at

$\max(\pi_s-\pi_d)$ inntreffer når $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} p_{j+k,j} = 1$ hvor $0\leq k\leq v-m$ og $p_{j+k,j} = \frac{1}{m}$, og

$\min(\pi_s-\pi_d)$ inntreffer når $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} p_{v-k-j,j} = 1$ for $-1\leq k\leq v-m-1$ og $p_{v-k-j,j} = \frac{1}{m}$.

Q.E.D.

Neste resultat viser at $\hat{\tau}_b$ er et spesialtilfelle av Γ definert ved (62).

LEMMA 6. (s.30)

La Y-scorene a_{ij} og Z-scorene b_{ij} være gitt ved:

$$a_{ij} = \begin{cases} +1 & \textit{hvis } y_i < y_j \\ 0 & \text{"} \quad y_i = y_j \\ -1 & \text{"} \quad y_i > y_j \end{cases} \qquad \textit{og} \qquad b_{ij} = \begin{cases} +1 & \textit{hvis } z_i < z_j \\ 0 & \text{"} \quad z_i = z_j \\ -1 & \text{"} \quad z_i > z_j \end{cases}$$

Da er $\Gamma = \hat{\tau}_b = \dfrac{P_s-P_d}{\sqrt{P_y\cdot P_z}}$

Bevis:

Fra (62): $$\Gamma = \frac{\sum\limits_{ij} a_{ij}b_{ij}}{\left\{\sum\limits_{ij} a_{ij}^2 \cdot \sum\limits_{ij} b_{ij}^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

Antall ordnete par blant K individer er K(K-1).

Det gir da at antall ordnete par blant de ialt n(n-1) ordnete par hvor $a_{ij}=0$ er $\sum\limits_{i=1}^{v} X_{i\cdot}(X_{i\cdot}-1)$ slik at $\sum\limits_{i\neq j} a_{ij}^2 = n(n-1) - \sum\limits_{i=1}^{v} X_{i\cdot}(X_{i\cdot}-1) = n^2 - \sum\limits_{i=1}^{v} X_{i\cdot}^2$.

Analogt blir: $\sum\limits_{i\neq j} b_{ij}^2 = n(n-1) - \sum\limits_{j=1}^{w} X_{\cdot j}(X_{\cdot j}-1) = n^2 - \sum\limits_{j=1}^{w} X_{\cdot j}^2$.

Dette medfører at nevneren i Γ kan uttrykkes slik:

$$\{\sum_{i\neq j} a_{ij}^2 \cdot \sum_{i\neq j} b_{ij}^2\}^{\frac{1}{2}} = \left[(n^2 - \sum_{i=1}^{w} X_{i\cdot}^2)(n^2 - \sum_{j=1}^{w} X_{\cdot j}^2)\right]^{\frac{1}{2}} = n^2 \sqrt{(1-\sum_i q_{i\cdot}^2)(1-\sum_j q_{\cdot j}^2)}$$
$$= n^2 \sqrt{P_y P_z}.$$

La U være summen av scorene $a_{ij}b_{ij}$ til alle n(n-1) ordnete par, dvs.:

$U = \sum\limits_{i\neq j} a_{ij}b_{ij}$. Nå er det klart at paret $\{(y_i,z_i),(y_j,z_j)\}$ gir samme score som $\{(y_j,z_j),(y_i,z_i)\}$ siden $a_{ij}b_{ij} = a_{ji}b_{ji}$.

Dermed: $U = 2\sum\limits_{i<j} a_{ij}b_{ij}$ ($\sum\limits_{i<j} a_{ij}b_{ij}$ er hva Kendall, [10], kaller totalscoren S.)

Videre ser man at for hver observasjon (y_i,z_i) i celle (rk) så er $a_{ij}b_{ij}=1$ for alle observasjoner (y_j,z_j) i celle (r',k') hvor r'>r og k'>k eller r'<r og k'<k. Tilsvarende er $a_{ij}b_{ij}=-1$ for alle observasjoner (y_j,z_j) i celle (r",k") hvor r">r og k"<k eller r"<r og k">k. Ellers vil alle par gi score lik 0.

Herav:

$$\sum_{i<j} a_{ij}b_{ij} = X_{11}(\sum_{i>1}\sum_{j>1} X_{ij}) + X_{12}(\sum_{i>1}\sum_{j>2} X_{ij}) + \ldots + X_{v-1,w-1}\cdot X_{vw}$$
$$- (X_{12}\cdot X_{21} + \ldots + X_{v-1w}(\sum_{j<w} X_{vj}))$$
$$= \sum_{r=1}^{v-1}\sum_{k=1}^{w-1} X_{rk}(\sum_{i>r}\sum_{j>k} X_{ij}) - \sum_{r=1}^{v-1}\sum_{k=2}^{w} X_{rk}(\sum_{i>r}\sum_{j<k} X_{ij}).$$

Dette gir:

$$U = 2n^2 \sum_{r=1}^{v-1}\sum_{k=1}^{w-1} q_{rk}(\sum_{i>r}\sum_{j>k} q_{ij}) - 2n^2 \sum_{r=1}^{v-1}\sum_{k=2}^{w} (\sum_{i>r}\sum_{j<k} q_{ij}) = n^2(P_s - P_d).$$

Dermed er:

$$\Gamma = \frac{U}{n^2\sqrt{P_y P_z}} = \frac{P_s - P_d}{\sqrt{P_y \cdot P_z}}.$$

Q.E.D.

Det neste resultatet som skal bevises, gjelder den asymptotiske variansen σ_γ^2 til $\sqrt{n}\hat{\gamma}$.

LEMMA 7. (s.33)

$$\sigma_\gamma^2 = \frac{16}{(1-\pi_t)^4} \{\pi_s^2\pi_{dd} - 2\pi_s\pi_d\pi_{sd} + \pi_d^2\pi_{ss}\}$$

K-estimatoren kan uttrykkes på følgende alternative former:

1) $$S_\gamma^2 = \frac{16}{(1-P_t)^4} \{P_s^2P_{dd} - 2P_sP_dP_{sd} + P_d^2P_{ss}\}$$

2) $$S_\gamma^2 = \frac{n\cdot 16}{(n^2-P_t^*)^4} \{P_s^{*2}P_{dd}^* - 2P_s^*P_d^*P_{sd}^* + P_d^{*2}P_{ss}^*\}$$

Bevis:

Uttrykket 1) for S_γ^2 følger umiddelbart fra σ_γ^2. Uttrykket 2) følger fra 1) siden $P_s = \frac{1}{n^2}P_s^*$, $P_d = \frac{1}{n^2}P_d^*$, $P_{ss} = \frac{1}{n^3}P_{ss}^*$, $P_{dd} = \frac{1}{n^3}P_{dd}^*$ og $P_{sd} = \frac{1}{n^3}P_{sd}^*$, og $1-P_t = 1-\frac{P_t^*}{n^2} = \frac{1}{n^2}(n^2-P_t^*)$.

Herav: $$S_\gamma^2 = \frac{n^8\cdot 16}{(n^2-P_t^*)^4} \{\frac{1}{n^7} (P_s^{*2}P_{dd}^* - 2P_s^*P_d^*P_{sd}^* + P_d^{*2}P_{ss}^*)\}$$

$$= \frac{n\cdot 16}{(n^2-P_t^*)^4} \{P_s^{*2}P_{dd}^* - 2P_s^*P_d^*P_{sd}^* + P_d^{*2}P_{ss}^*\}.$$

Det står nå igjen å vise uttrykket for σ_γ^2. Fra III.1.:

$$\sigma_\gamma^2 = \sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{w} p_{ij}(\gamma_{ij}-\gamma^*)^2 \text{ hvor } \gamma_{ij} = \frac{\partial\gamma}{\partial p_{ij}} \text{ og } \gamma^* = \sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{w}\gamma_{ij}p_{ij}.$$

$$\gamma = \frac{\pi_s - \pi_d}{\pi_s + \pi_d}, \quad \pi_s = 2\sum_{i=1}^{v-1}\sum_{j=1}^{w-1} p_{ij}\{\sum_{i'>i}\sum_{j'>j} p_{i'j'}\},$$

$$\pi_d = 2\sum_{i=1}^{v-1}\sum_{j=2}^{w} p_{ij}\{\sum_{i'>i}\sum_{j'<j} p_{i'j'}\}.$$

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{(\pi_s+\pi_d)^2}\left\{\left(\frac{\partial\pi_s}{\partial p_{ij}} - \frac{\partial\pi_d}{\partial p_{ij}}\right)(\pi_s+\pi_d) - \left(\frac{\partial\pi_s}{\partial p_{ij}} + \frac{\partial\pi_d}{\partial p_{ij}}\right)(\pi_s-\pi_d)\right\}$$

$$= \frac{2}{(1-\pi_t)^2}\left[\pi_d\cdot\frac{\partial\pi_s}{\partial p_{ij}} - \pi_s\cdot\frac{\partial\pi_d}{\partial p_{ij}}\right]$$

La $\alpha_{ij} = \sum_{i'>i} \sum_{j'>j} p_{i'j'} + \sum_{i'<i} \sum_{j'<j} p_{i'j'}$ og $\beta_{ij} = \sum_{i'>i} \sum_{j'<j} p_{i'j'} + \sum_{i'<i} \sum_{j'>j} p_{i'j'}$

for $i=1,\ldots,v$ og $j=1,\ldots,w$.

Fra (65) med p innsatt for q ser vi at

$$\pi_{ss} = \sum_i \sum_j p_{ij} \alpha_{ij}^2$$

$$\pi_{sd} = \sum_i \sum_j p_{ij} \alpha_{ij}\beta_{ij} \quad \text{og} \quad \pi_{dd} = \sum_i \sum_j p_{ij} \beta_{ij}^2.$$

Videre har vi at:

$$\frac{\partial \pi_s}{\partial p_{ij}} = 2\alpha_{ij} \quad \text{og} \quad \frac{\partial \pi_d}{\partial p_{ij}} = 2\beta_{ij} \quad \text{(Se også [8], s. 362.)}$$

Herav:

$$\gamma_{ij} = \frac{4}{(1-\pi_t)^2} \{\pi_d \cdot \alpha_{ij} - \pi_s \beta_{ij}\}.$$

$$\gamma^* = \sum_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{w} p_{ij} \frac{4}{(1-\pi_t)^2} (\pi_d \alpha_{ij} - \pi_s \beta_{ij})$$

$$= \frac{4}{(1-\pi_t)^2} \{\pi_d \sum_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{w} p_{ij}\alpha_{ij} - \pi_s \sum_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{w} p_{ij}\beta_{ij}\}.$$

Det ses at $\sum_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{w} p_{ij}\alpha_{ij} = \pi_s$ og $\sum_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{w} p_{ij}\beta_{ij} = \pi_d$, slik at $\gamma^* = 0$.

Dette medfører:

$$\sigma_\gamma^2 = \sum_i \sum_j p_{ij}\gamma_{ij}^2 = \frac{16}{(1-\pi_t)^4} \sum_i \sum_j p_{ij} (\pi_d \alpha_{ij} - \pi_s \beta_{ij})^2$$

$$= \frac{16}{(1-\pi_t)^4} \sum_i \sum_j p_{ij} (\pi_d^2 \alpha_{ij}^2 + \pi_s^2 \beta_{ij}^2 - 2\pi_s \pi_d \alpha_{ij}\beta_{ij})$$

$$= \frac{16}{(1-\pi_t)^4} \{\pi_d^2 \sum_{ij} p_{ij}\alpha_{ij}^2 + \pi_s^2 \sum_{i,j} p_{ij}\beta_{ij}^2 - 2\pi_s\pi_d \sum_{ij} p_{ij}\alpha_{ij}\beta_{ij}\}$$

$$= \frac{16}{(1-\pi_t)^4} \{\pi_s^2 \pi_{dd} + \pi_d^2 \pi_{ss} - 2\pi_s \pi_d \pi_{sd}\}.$$

Q.E.D.

Neste lemma gir estimert asymptotisk varians for $\sqrt{n}\,\hat{\tau}_b$ og $\sqrt{n}\,\hat{\tau}_c$, hvor

$\hat{\tau}_c = \frac{m}{m-1} (P_s - P_d)$.

LEMMA 8. (s. 35)

$$S_b^2 = \frac{1}{(P_yP_z)^3}\ \{4P_y^2P_z^2\ (P_{ss}+P_{dd}-2P_{sd})+(P_s-P_d)^2(P_z^2\sum_i q_{i.}^3+P_y^2\ \sum_j q_{.j}^3+$$

$$2P_yP_z\ \sum_{i,j} q_{ij}q_{i.}q_{.j}+4P_yP_z(P_s-P_d)(P_z\sum_{i,j} q_{ij}q_{i.}(\hat{\alpha}_{ij}-\hat{\beta}_{ij})\ +$$

$$P_y\sum_{i,j} q_{ij}q_{.j}(\hat{\alpha}_{ij}-\hat{\beta}_{ij}))\ -\ (P_s-P_d)^2(P_y+P_z)^2\}.$$

hvor

$$\hat{\alpha}_{ij} = \sum_{i'>j}\ \sum_{j'>j} q_{i'j'} + \sum_{i'<i}\ \sum_{j'<j} q_{i'j'}$$

$$\hat{\beta}_{ij} = \sum_{i'>j}\ \sum_{j'<j} q_{i'j'} + \sum_{i'<i}\ \sum_{j'>j} q_{i'j'}$$

$$S_c^2 = \frac{4m^2}{(m-1)^2}\ \{P_{ss}+P_{dd}-2P_{sd}-(P_s-P_d)^2\}.$$

Bevis:

Fra III.1.(49): $S_b^2 = \sum_{i=1}^{v}\ \sum_{j=1}^{w} q_{ij}(\hat{\tau}_{b,i,j}-\hat{\tau}_b^*)^2 = \sum_{i=1}^{v} q_{ij}\hat{\tau}_{b,i,j}^2-\hat{\tau}_b^{*2}$.

hvor $\hat{\tau}_{b,i,j} = \dfrac{\partial\hat{\tau}_b}{\partial q_{ij}}$ og $\hat{\tau}_b^* = \sum_{i=1}^{v}\ \sum_{j=1}^{w} q_{ij}\ \hat{\tau}_{b,i,j}$.

$\hat{\tau}_b = \dfrac{P_s-P_d}{\sqrt{P_yP_z}}$. Fra beviset for lemma 7 ser vi at:

$$\frac{\partial P_s}{\partial q_{ij}} = 2\hat{\alpha}_{ij}\ \text{ og }\ \frac{\partial P_d}{\partial q_{ij}} = 2\hat{\beta}_{ij}\ \text{ og }\ P_s = \sum q_{ij}\hat{\alpha}_{ij},\ P_d = \sum q_{ij}\hat{\beta}_{ij}.$$

Dessuten er:

$$\frac{\partial P_y}{\partial q_{ij}} = -2q_{i.}\ \text{ og }\ \frac{\partial P_z}{\partial q_{ij}} = -2q_{.j}.$$

$$\hat{\tau}_{b,i,j} = \frac{(2\hat{\alpha}_{ij}-2\hat{\beta}_{ij})\sqrt{P_yP_z} + (P_s-P_d)\ \frac{2}{2\sqrt{P_yP_z}}\ (q_{i.}P_z+q_{.j}P_y)}{P_yP_z}$$

$$= \frac{1}{(P_yP_z)^{3/2}}\ \{2(\hat{\alpha}_{ij}-\hat{\beta}_{ij})P_yP_z + (P_s-P_d)(q_{i.}P_z+q_{.j}P_y)\}.$$

$$\Rightarrow \hat{\tau}_b^* = \frac{1}{(P_yP_z)^{3/2}}\ \{2P_yP_z(P_s-P_d)+(P_s-P_d)(P_z\ \sum_{i=1}^{v} q_{i.}^2+P_y\sum_j q_{.j}^2)\}.$$

$$= (P_yP_z)^{-3/2}\{2P_yP_z(P_s-P_d)+(P_s-P_d)(P_z+P_y-2P_yP_z)\}$$

$$= (P_yP_z)^{-3/2}\{(P_s-P_d)(P_y+P_z)\}.$$

Dette medfører:

$$S_b^2 = (P_yP_z)^{-3}\ \{\sum_{ij} q_{ij}\ \Big[4P_y^2P_z^2\ (\hat\alpha_{ij}^2+\hat\beta_{ij}^2-2\hat\alpha_{ij}\ \hat\beta_{ij})+$$

$$+\ (P_s-P_d)^2(q_{i.}^2P_z^2+q_{.j}^2P_y^2+2q_{i.}q_{.j}P_yP_z)\ +\ 4(\hat\alpha_{ij}-\hat\beta_{ij})P_yP_z(P_s-P_d)(q_{i.}P_z+q_{.j}P_y)\Big]$$

$$-\ (P_s-P_d)^2(P_y+P_z)^2\}$$

$$= (P_yP_z)^{-3}\ \{4P_y^2P_z^2(P_{ss}+P_{dd}-2P_{sd})+(P_s-P_d)^2(P_z^2\ \sum_i q_{i.}^3+P_y^2\ \sum_j q_{.j}^3+2P_yP_z\sum_{ij} q_{ij}q_{i.}q_{.j})$$

$$+\ 4P_yP_z(P_s-P_d)(P_z\sum_{i,j} q_{ij}q_{i.}(\hat\alpha_{ij}-\hat\beta_{ij})+P_y\sum_{i,j} q_{ij}q_{.j}(\hat\alpha_{ij}-\hat\beta_{ij})$$

$$-\ (P_s-P_d)^2(P_y+P_z)^2\}.$$

$$S_c^2 = \sum_{i,j} q_{ij}(\hat\tau_{c,i,j}-\hat\tau_c^*)^2,\quad \hat\tau_{c,i,j}=\frac{\partial\hat\tau_c}{\partial q_{ij}} = \frac{m}{m-1}\ 2(\hat\alpha_{ij}-\hat\beta_{ij}).$$

Herav: $\tau_c^* = \frac{2m}{m-1}\ (P_s-P_d)$ og dermed

$$S_c^2 = \frac{4m^2}{(m-1)^2}\ \{\sum_{i=1}^{v}\ \sum_{j=1}^{w} q_{ij}(\hat\alpha_{ij}^2+\hat\beta_{ij}^2-2\hat\alpha_{ij}\hat\beta_{ij})-(P_s-P_d)^2\}$$

$$= \frac{4m^2}{(m-1)^2}\ \{P_{ss}+P_{dd}-2P_{sd}-(P_s-P_d)^2\}.$$

Q.E.D.

De to neste lemmaer angår K-estimatorene for de asymptotiske variansene til $\sqrt{n}\cdot\hat\eta$ og $\sqrt{n}\cdot\hat\phi^2$.

LEMMA 10. (s. 40)

La $\hat P_1 = \frac{1}{2}(\sum_i q_{i.}^2+\sum_j q_{.j}^2)$ og $\hat P_2 = \frac{1}{2}\sum_i\ \sum_j q_{ij}^2(\frac{1}{q_{i.}} + \frac{1}{q_{.j}})$

$$\hat\eta = \frac{\hat P_2-\hat P_1}{1-\hat P_1}$$

Da vil

$$\frac{\sqrt{n}\ (\hat\eta-\eta)}{S_\eta}\ \ \xrightarrow{D}\ \ N(0,1)$$

hvor

$$S_\eta^2 = \frac{1}{4(1-\hat P_1)^4}\ \{\sum_{i,j} q_{ij}[2q_{ij}(\frac{1}{q_{i.}} + \frac{1}{q_{.j}})(1-\hat P_1)-\hat\gamma_{ij}(1-\hat P_1)-2(q_{i.}+q_{.j})(1-\hat P_2)]^2-$$

$$4[\hat P_2-2\hat P_1+\hat P_1\hat P_2]^2\}\ \ (*)$$

Her er
$$\hat{\gamma}_{ij} = \sum_{s=1}^{w} \frac{q_{is}^2}{q_{i.}^2} + \sum_{r=1}^{v} \frac{q_{rj}^2}{q_{.j}^2} .$$

Bevis:

Fra teorem 1 has at $\dfrac{\sqrt{n}\,(\hat{\eta}-\eta)}{S_\eta} \xrightarrow{D} N(0,1)$

hvor
$$S_\eta^2 = \sum_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{w} q_{ij}\hat{\eta}_{ij}^2 - \eta^{*2}, \quad \hat{\eta}_{ij} = \frac{\partial\hat{\eta}}{\partial q_{ij}} \quad \text{og} \quad \eta^* = \sum_{i,j} \hat{\eta}_{ij} q_{ij} .$$

Alt vi må vise er derfor at (*) er lik S_η^2.

Vi finner:
$$\frac{\partial\hat{P}_2}{\partial q_{ij}} = -\tfrac{1}{2} \sum_{j'=1}^{w} (q_{ij'}/q_{i.})^2 + \frac{q_{ij}}{q_{i.}} - \tfrac{1}{2} \sum_{i'=1}^{v} \frac{q_{i'j}^2}{q_{.j}^2} + \frac{q_{ij}}{q_{.j}} = q_{ij}\Big(\frac{1}{q_{i.}}+\frac{1}{q_{.j}}\Big) - \tfrac{1}{2}\hat{\gamma}_{ij} .$$

$$\frac{\partial\hat{P}_1}{\partial q_{ij}} = (q_{i.}+q_{.j}).$$ Av dette fås

$$\hat{\eta}_{ij} = \frac{[q_{ij}(\frac{1}{q_{i.}}+\frac{1}{q_{.j}}) - \frac{1}{2}\hat{\gamma}_{ij} - (q_{i.}+q_{.j})](1-\hat{P}_1) + (q_{i.}+q_{.j})(\hat{P}_2-\hat{P}_1)}{(1-\hat{P}_1)^2}$$

$$= \frac{1}{2(1-\hat{P}_1)^2} \{[2q_{ij}(\frac{1}{q_{i.}}+\frac{1}{q_{.j}}) - \hat{\gamma}_{ij} - 2(q_{i.}+q_{.j})](1-\hat{P}_1) + 2(q_{i.}+q_{.j})(\hat{P}_2-\hat{P}_1)\}$$

$$= \frac{1}{2(1-\hat{P}_1)^2} \{ 2q_{ij}(\frac{1}{q_{i.}}+\frac{1}{q_{.j}})(1-\hat{P}_1) - \hat{\gamma}_{ij}(1-\hat{P}_1) - 2(q_{i.}+q_{.j})(1-\hat{P}_2)\}.$$

$$\hat{\eta}^* = \frac{1}{2(1-\hat{P}_1)^2} \{ 2(\sum_{i,j} q_{ij}^2(\frac{1}{q_{i.}}+\frac{1}{q_{.j}}))(1-\hat{P}_1) - 2(\sum_i q_{i.}^2 + \sum_j q_{.j}^2)(1-\hat{P}_2) -$$

$$(1-\hat{P}_1)(\sum_{i,j} q_{ij}^2(\frac{1}{q_{i.}}+\frac{1}{q_{.j}}))\}$$

$$= \frac{1}{2(1-\hat{P}_1)^2} \{2\cdot 2\hat{P}_2(1-\hat{P}_1) - 2(2\hat{P}_1)(1-\hat{P}_2) - (1-\hat{P}_1)(2\hat{P}_2)\} = \frac{2}{2(1-\hat{P}_1)^2}\{\hat{P}_2 - 2\hat{P}_1 + \hat{P}_1\hat{P}_2\}.$$

Herav:
$$S_\eta^2 = \{ \sum_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{w} q_{ij}[2q_{ij}(\frac{1}{q_{i.}} + \frac{1}{q_{.j}})(1-\hat{P}_1) - \hat{\gamma}_{ij}(1-\hat{P}_1) - 2(q_{i.}+q_{.j})(1-\hat{P}_2)]^2 -$$

$$4[\hat{P}_2 - 2\hat{P}_1 + \hat{P}_1\hat{P}_2]^2\} \frac{1}{4(1-\hat{P}_1)^4} .$$

Q.E.D.

LEMMA 11. (s.42)

$$S_\phi^2 = \sum_{i,j} q_{ij}(2\hat{\alpha}_{ij}-\hat{\mu}_i-\hat{\beta}_j)^2-[\sum_{i,j} q_{ij}(2\hat{\alpha}_{ij}-\hat{\mu}_i-\hat{\beta}_j)]^2 \qquad \text{(i)}$$

hvor

$$\hat{\alpha}_{ij} = \frac{1}{q_{i.}q_{.j}}(q_{ij}-q_{i.}q_{.j})$$

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{q_{i.}^2}\sum_j \frac{(q_{ij}-q_{i.}q_{.j})}{q_{.j}}$$

og

$$\hat{\beta}_j = \frac{1}{q_{.j}^2}\sum_i \frac{(q_{ij}-q_{i.}q_{.j})}{q_{i.}}$$

Bevis:

$$\hat{\phi}^2 = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{v}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{w}\frac{(q_{ij}-q_{i.}q_{.j})^2}{q_{i.}q_{.j}} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{v}\frac{(q_{is}-q_{i.}q_{.s})^2}{q_{i.}q_{.s}} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{w}\frac{(q_{rj}-q_{r.}q_{.j})^2}{q_{r.}q_{.j}} + \frac{(q_{rs}-q_{r.}q_{.s})^2}{q_{r.}q_{.s}}.$$

Herav ses at

$$\hat{\phi}_{rs} = \frac{\partial\hat{\phi}^2}{\partial q_{rs}} = 0+\sum_{i\neq r}\frac{(q_{is}-q_{i.}q_{.s})}{(q_{i.}q_{.s})^2}\{-2q_{i.}^2\, q_{.s}-q_{i.}\}+$$

$$\sum_{j\neq s}\frac{(q_{rj}-q_{r.}q_{.j})}{q_{r.}q_{.j}}(-2q_{r.}q_{.j}^2-q_{.j})+\frac{(q_{rs}-q_{r.}q_{.s})}{(q_{r.}q_{.s})^2}\{2q_{r.}q_{.s}-2q_{r.}^2q_{.s}-$$

$$2q_{r.}q_{.s}^2-q_{r.}-q_{.s}\},$$

hvilket gir:

$$\hat{\phi}_{rs} = 2\cdot\hat{\alpha}_{rs}-2\sum_{i=1}^{v}\frac{q_{is}-q_{i.}q_{.s}}{q_{.s}}-2\sum_{j=1}^{w}\frac{q_{rj}-q_{r.}q_{.j}}{q_{r.}}-\sum_{i=1}^{v}\frac{(q_{is}-q_{i.}q_{.s})}{q_{i.}q_{.s}^2}-$$

$$\sum_{j=1}^{w}\frac{(q_{rj}-q_{r.}q_{.j})}{q_{r.}^2q_{.j}}$$

$$= 2\hat{\alpha}_{rs}-\hat{\beta}_s-\hat{\mu}_r.$$

Herav fås:

$$S_\phi^2 = \sum_{i,j} q_{ij}\hat{\phi}_{ij}^2-(\sum_{i,j} q_{ij}\hat{\phi}_{ij})^2,$$ som er lik (i).

Q.E.D.

De neste fire resultatene som bevises er fra III.4.(vi).

Det første lemma gir K-estimatoren for den asymptotiske varians til $\sqrt{n}\,\hat{D}$.

$$\hat{D} = \sum_{i,j} (q_{ij}-q_{i.}q_{.j})^2.$$

LEMMA 12. (s.43)

$$S_D^2 = 4\{\sum_{i,j} q_{ij}(q_{ij}-q_{i.}q_{.j}-\hat{\xi}_i-\hat{\nu}_j)^2-[\sum_{i,j}(q_{ij}-q_{i.}q_{.j}-\hat{\xi}_i-\hat{\nu}_j)]^2\}$$

hvor $\hat{\xi}_i = \sum_{k=1}^{w} q_{.k}(q_{ik}-q_{i.}q_{.k})$ *for* $i=1,\ldots,v$

og $\hat{\nu}_j = \sum_{r=1}^{v} q_{r.}(q_{rj}-q_{r.}q_{.j})$ *for* $j=1,\ldots,w.$

Bevis:

Ved å anvende samme oppspaltning på $\hat{D}$ som på $\hat{\phi}^2$ i beviset for lemma 11, ser vi at

$$\hat{D}_{ij} = \frac{\partial\hat{D}}{\partial q_{ij}} = 2\{(q_{ij}-q_{i.}q_{.j})-\sum_{k=1}^{w} q_{.k}(q_{ik}-q_{i.}q_{.k})-\sum_{r=1}^{v} q_{r.}(q_{rj}-q_{r.}q_{.j})\}$$

$$= 2(q_{ij}-q_{i.}q_{.j}-\hat{\xi}_i-\hat{\nu}_j)$$

for $i=1,\ldots,v$ og $j=1,\ldots,w$. Herav følger resultatet for S_D^2.

Q.E.D.

LEMMA 13. (s. 44)

a) $v = w = 2$ *gir:* $C_1 < D < C_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{C_1} < \kappa_1 < \frac{1}{2}\sqrt{C_2}$

b) $v=2,\ w>2$ (*eller* $w=2,\ v>2$) *gir:* $C_1 < D < C_2 \Rightarrow \sqrt{\frac{C_1}{vw}} < \kappa_1 < \sqrt{\frac{C_2}{2}}$

c) $v>2,\ w>2$ *gir:* $C_1 < D < C_2 \Rightarrow \sqrt{\frac{C_1}{vw}} < \kappa_1 < \sqrt{C_2}$.

Bevis:

a) $|p_{ij}-p_{i.}p_{.j}| = |p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21}|$ for $i=1,2$ og $j=1,2$ (se lemma 18).

Dermed: $D = 4\kappa_1^2$ og $C_1 < D < C_2 \Leftrightarrow \frac{C_1}{4} < \kappa_1^2 < \frac{C_2}{4} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{C_1}{2}} < \kappa_1 < \sqrt{\frac{C_2}{2}}$

b) $v=2,\ w>2$ eller $w=2,\ v>2$.

Anta $v=2$. For $w=2$ blir utledningen helt analog.

Vi har at: $|p_{1j}-p_{1.}p_{.j}| = |p_{.j}-p_{2j}-(1-p_{2.})\,p_{.j}| = |-p_{2j}+p_{2.}p_{.j}| = |p_{2j}-p_{2.}p_{.j}|$

for $j=1,\ldots,w$, slik at

$$D = 2\sum_{j=1}^{w}(p_{1j}-p_{1.}p_{.j})^2 \text{ og } \kappa_1 = \max_j |p_{1j}-p_{1.}p_{.j}|$$

Dermed vil

$$C_1 < D < C_2 \Leftrightarrow \frac{C_1}{2} < \sum_j (p_{1j}-p_{1.}p_{.j})^2 < \frac{C_2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{C_1}{2} < w\kappa_1^2 \text{ og } \kappa_1^2 < \frac{C_2}{2} \iff \frac{C_1}{2w} < \kappa_1^2 < \frac{C_2}{2} \iff \sqrt{\frac{C_1}{vw}} < \kappa_1 < \sqrt{\frac{C_2}{2}}.$$

c) $C_1 < D \Rightarrow C_1 < vw\kappa_1^2 \iff C_1/vw < \kappa_1^2,$

og $D < C_2 \Rightarrow \kappa_1^2 < C_2.$

Herav:

$$C_1 < D < C_2 \Rightarrow \sqrt{\frac{C_1}{vw}} < \kappa_1 < \sqrt{C_2}.$$

Q.E.D.

Lemma 14 gir K-estimatoren for den asymptotiske varians til $\sqrt{n}\,\hat{E}$, hvor

$$\hat{E} = \sum_{i,j} \left(\frac{q_{ij}}{q_{i\cdot}} - q_{\cdot j}\right)^2.$$

LEMMA 14. (s. 45)

$$S_E^2 = 4\left\{ \sum_{i,j} q_{ij}\left(\frac{q_{ij}-q_{i\cdot}q_{\cdot j}}{q_{i\cdot}^2} - \hat{E}_i - \hat{F}_j\right)^2 - \left[\sum_{i,j} q_{ij}\left(\frac{q_{ij}-q_{i\cdot}q_{\cdot j}}{q_{i\cdot}^2} - \hat{E}_i - \hat{F}_j\right)\right]^2\right\},$$

hvor

$$\hat{E}_i = q_{i\cdot}^{-3} \sum_{k=1}^{w} (q_{ik}-q_{i\cdot}q_{\cdot k})q_{ik} \quad \text{for } i=1,\dots,v$$

$$\hat{F}_j = \sum_{r=1}^{v} \frac{q_{rj}-q_{r\cdot}q_{\cdot j}}{q_{r\cdot}} \quad \text{for } j=1,\dots,w.$$

Bevis:

Ved å bruke samme oppspaltning av $\hat{E}$ som av $\hat{D}$ i lemma 12 og $\hat{\phi}^2$ i lemma 11, ser vi at

$$\hat{E}_{rs} = \frac{\partial \hat{E}}{\partial q_{rs}} = -2 \sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{v} \frac{q_{is}-q_{i\cdot}q_{\cdot s}}{q_{i\cdot}} - 2 \sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{w} \frac{(q_{rj}-q_{r\cdot}q_{\cdot j})q_{rj}}{q_{r\cdot}^3} +$$

$$2\,\frac{(q_{rs}-q_{r\cdot}q_{\cdot s})}{q_{r\cdot}^3}(q_{r\cdot}-q_{rs}-q_{r\cdot}^2)$$

$$= 2\left\{\frac{q_{rs}-q_{r\cdot}q_{\cdot s}}{q_{r\cdot}^2} - \hat{E}_r - \hat{F}_s\right\}.$$

Herav følger S_E^2.

Q.E.D.

LEMMA 15. (s. 45)

1) $w = 2$ *gir:* $K_1 < E < K_2 \Rightarrow \sqrt{\frac{K_1}{vw}} < \kappa_2 < \sqrt{\frac{K_2}{2}}$

2) $w > 2$ *gir:* $K_1 < E < K_2 \Rightarrow \sqrt{\frac{K_1}{vw}} < \kappa_2 < \sqrt{K_2}.$

Bevis:

1) $w = 2$: La $\Delta_i = |p_{i1}-p_{i.}p_{.1}|$ for $i=1,\dots,v$. Siden $|p_{i1}-p_{i.}p_{.1}|=|p_{i2}-p_{i.}p_{.2}|$

så er $\left|\frac{p_{ij}}{p_{i.}}-p_{.j}\right| = \frac{\Delta_i}{p_i}$ for $j=1,2$, dvs.

$$\left|\frac{p_{i1}}{p_{i.}}-p_{.1}\right| = \left|\frac{p_{i2}}{p_{i.}}-p_{.2}\right| \quad \text{for } i=1,2,\dots,v.$$

Dette gir: $E = 2\sum_{i=1}^{v}\left(\frac{p_{i1}}{p_{i.}}-p_{.1}\right)^2$ og $\kappa_2 = \max_i \left|\frac{p_{i1}}{p_{i.}}-p_{.1}\right|$, slik at

$$K_1 < E < K_2 \iff \frac{K_1}{2} < \sum_i\left(\frac{p_{i1}}{p_{i.}}-p_{.1}\right)^2 < \frac{K_2}{2} \Rightarrow \frac{K_1}{2v} < \kappa_2^2 < \frac{K_2}{2}$$

$$\iff \sqrt{\frac{K_1}{2v}} < \kappa_2 < \sqrt{\frac{K_2}{2}}.$$

2) $w > 2$:

$$K_1 < E < K_2 \Rightarrow \frac{K_1}{vw} < \kappa_2^2 < K_2 \iff \sqrt{\frac{K_1}{vw}} < \kappa_2 < \sqrt{K_2}.$$

Q.E.D.

Den neste setningen gir K-estimatoren for den asymptotiske varians til $\sqrt{n}\ \hat{\eta}_b$ (se III.5.(iii)).

LEMMA 17. (s. 48)

La $\hat{P}_2^b = \sum_i\sum_j q_{ij}^2/q_{i.}$ og $\hat{P}_1^b = \sum_j q_{.j}^2$, $\hat{\eta}_b = \dfrac{\hat{P}_2^b-\hat{P}_1^b}{1-\hat{P}_1^b}$.

Da vil

$$\sqrt{n}\,\frac{(\hat{\eta}_b-\eta_b)}{S_{ob}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

hvor

$$S_{ob}^2 = \frac{1}{(1-\hat{P}_1^b)^4}\left\{\sum_{i,j} q_{ij}\left[2\frac{q_{ij}}{q_{i.}}(1-\hat{P}_1^b)-2q_{.j}(1-\hat{P}_2^b)-\hat{\rho}_i(1-\hat{P}_1^b)\right]^2-\left[\hat{P}_2^b-2\hat{P}_1^b+\hat{P}_1^b\hat{P}_2^b\right]^2\right\} \tag{ii}$$

Her er

$$\hat{\rho}_i = \sum_j (q_{ij}/q_{i.})^2.$$

Bevis:

Vi vet at $S_{ob}^2 = \sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{w} q_{ij}(\hat{\eta}_{ij}^o-\hat{\eta}^o)^2$ hvor $\hat{\eta}_{ij}^o = \dfrac{\partial\hat{\eta}_b}{\partial q_{ij}}$ og $\hat{\eta}^o = \sum_{ij} q_{ij}\hat{\eta}_{ij}^o$.

Alt vi må bevise er (ii), da vil resten følge fra teorem 1.

Det ses lett at:

$$\frac{\partial\hat{P}_1^b}{\partial q_{ij}} = 2q_{.j} \quad \text{og} \quad \frac{\partial\hat{P}_2^b}{\partial q_{ij}} = \frac{2q_{ij}}{q_{i.}} - \sum_{j'=1}^{w}\left(\frac{q_{ij'}}{q_{i.}}\right)^2.$$

Det gir:

$$\hat{\eta}^o_{ij} = \frac{1}{(1-\hat{P}^b_1)^2}\{(2\frac{q_{ij}}{q_{i\cdot}} - \sum_{j'}(\frac{q_{ij'}}{q_{i\cdot}})^2 - 2q_{\cdot j})(1-\hat{P}_1)+2q_{\cdot j}(\hat{P}_2-\hat{P}_1)\}$$

$$= \frac{1}{(1-\hat{P}^b_1)^2}\{2\frac{q_{ij}}{q_{i\cdot}}(1-\hat{P}^b_1) - 2q_{\cdot j}(1-\hat{P}^b_2) - \hat{\rho}_i(1-\hat{P}^b_1)\},$$

og dermed:

$$\hat{\eta}^o = \frac{1}{(1-P^b)^2}\{2(\sum_{i,j}\frac{q^2_{ij}}{q_{i\cdot}})(1-\hat{P}^b_1) - 2(\sum_j q^2_{\cdot j})(1-\hat{P}^b_2)-(1-\hat{P}^b_1)\sum_{i,j}\frac{q^2_{ij}}{q_{i\cdot}}\}$$

$$= \frac{1}{(1-\hat{P}^b_1)^2}\{2\hat{P}^b_2(1-\hat{P}^b_1)-2\hat{P}^b_1(1-\hat{P}^b_2)-(1-\hat{P}^b_1)\hat{P}^b_2\}$$

$$= \frac{1}{(1-\hat{P}^b_1)^2}\{\hat{P}^b_2-2\hat{P}^b_1+\hat{P}^b_1\hat{P}^b_2\}.$$

Herav:

$$S^2_{ob} = \frac{1}{(1-\hat{P}^b_1)^4}\{\sum_{i,j} q_{ij}\,[2q_{ij}q^{-1}_{i\cdot}(1-\hat{P}^b_1)-2q_{\cdot j}(1-\hat{P}^b_2)-\hat{\rho}_i(1-\hat{P}^b_1)]^2-$$

$$[\hat{P}^b_2-2\hat{P}^b_1+\hat{P}^b_1\hat{P}^b_2]^2\}.$$

Q.E.D.

Resten av resultatene fra III dreier seg om 2x2-tabellen. (III.8.)

LEMMA 18. (s. 53)

$$p_{11} = p_{1\cdot}p_{\cdot 1}+(\Delta-1)p_{12}p_{21}$$

$$p_{12} = p_{1\cdot}p_{\cdot 2}-(\Delta-1)p_{12}p_{21}$$

$$p_{21} = p_{2\cdot}p_{\cdot 1}-(\Delta-1)p_{12}p_{21}$$

$$p_{22} = p_{2\cdot}p_{\cdot 2}+(\Delta-1)p_{12}p_{21}, \quad \textit{hvor} \quad \Delta = \frac{p_{11}p_{22}}{p_{12}p_{21}}.$$

Bevis:

a) $p_{11}-p_{1\cdot}p_{\cdot 1} = p_{11}-(p_{11}+p_{12})(p_{11}+p_{21}) = p_{11}-p_{11}(p_{11}+p_{12}+p_{21})-p_{12}p_{21}$

$= p_{11}-p_{11}(1-p_{22})-p_{12}p_{21} = p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21} = (\Delta-1)p_{12}p_{21}.$

b) $p_{12}-p_{1\cdot}p_{\cdot 2} = p_{12}-p_{12}(1-p_{21})-p_{11}p_{22} = p_{12}p_{21}-p_{11}p_{22} = -(\Delta-1)p_{12}p_{21}$

c) $p_{21}-p_{2\cdot}p_{\cdot 1} = p_{21}-p_{21}(1-p_{12})-p_{11}p_{22} = p_{12}p_{21}-p_{11}p_{22} = -(\Delta-1)p_{12}p_{21}$

d) $p_{22}-p_{2\cdot}p_{\cdot 2} = p_{22}-p_{22}(1-p_{11})-p_{12}p_{21} = p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21} = (\Delta-1)p_{12}p_{21}$

Q.E.D.

La $d = (\ln\frac{p_{11}p_{22}}{p_{12}p_{21}})^2$. Da gjelder følgende:

LEMMA 19. (s. 56)

$$d_{ij} = \frac{\partial d}{\partial p_{ij}} = \begin{cases} \frac{2}{p_{ii}} \ln \Delta & i = j,\ i = 1,2 \\ -\frac{2}{p_{ij}} \ln \Delta & i \neq j \end{cases}$$

$$d^* = 0$$

$$S_d^2 = 4\hat{d}nS^2, \text{ } \textit{hvor } S^2 = X_{11}^{-1} + X_{22}^{-1} + X_{12}^{-1} + X_{21}^{-1}.$$

Bevis:

For i,j =1,2 has: $d_{ij} = 2\ln \Delta \frac{\partial \ln \Delta}{\partial p_{ij}}$ og vi har at

$$\frac{\partial \ln \Delta}{\partial p_{ij}} = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial p_{ij}} = \begin{cases} \frac{1}{p_{ii}} & \text{for } i=j \\ -\frac{1}{p_{ij}} & \text{for } i\neq j \end{cases}$$

Herav følger at $d_{ii} = \frac{2}{p_{ii}} \ln \Delta$ og $d_{ij} = -\frac{2}{p_{ij}} \ln \Delta$ for $i\neq j$

$$d^* = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} d_{ij}p_{ij} = 2\ln \Delta(1-1-1+1) = 0.$$

La $$\sigma_d^2(p) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} p_{ij}(d_{ij}-d^*)^2 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} p_{ij}d_{ij}^2.$$

Vi finner:

$$\sigma_d^2 = 4(\ln \Delta)^2\left(\frac{1}{p_{11}} + \frac{1}{p_{12}} + \frac{1}{p_{21}} + \frac{1}{p_{22}}\right). \quad \text{Herav:}$$

$$S_d^2 = 4\hat{d}\left(\frac{1}{q_{11}} + \frac{1}{q_{12}} + \frac{1}{q_{21}} + \frac{1}{q_{22}}\right) = 4\hat{d}\left(\frac{n}{X_{11}} + \frac{n}{X_{12}} + \frac{n}{X_{21}} + \frac{n}{X_{22}}\right) = 4n\hat{d}S^2$$

Q.E.D.

I neste lemma finner vi den betingede fordeling for X_{11} gitt marginalene i 2x2-tabellen.

LEMMA 20. (s. 58)

$$P(X_{11}=x_{11} \mid X_{1.}=x_1,\ X_{.1}=y_1) = \frac{\binom{x_1}{x_{11}}\binom{n-x_1}{y-x_{11}} e^{\rho x_{11}}}{\sum_{z=0}^{\min(x_1,y_1)} \binom{x_1}{z}\binom{n-x_1}{y_1-z} e^{\rho z}} = f_\rho(x_{11} \mid x_1,y_1)$$

hvor $\rho = \ln \Delta$.

Bevis:

$$P(X_{11}=x_{11} \mid X_{1.}=x_1,\ X_{.1}=y_1) = \frac{P(X_{11}=x_{11} \cap X_{12}=x_1-x_{11} \cap X_{21}=y_1-x_{11} \cap X_{22}=n-x_1-y_1+x_{11})}{P(X_{1.}=x_1 \cap Y_{.1}=y_1)}$$

$$= \frac{\dfrac{n!}{x_{11}!(x_1-x_{11})!(y_1-x_{11})!(n-x_1-y_1+x_{11})!} \cdot p_{22}{}^n \cdot e^{\tau_1 x_1+\tau_2 y_1+\rho z}}{\sum\limits_{z=0}^{\min(x_1,y_1)} \dfrac{n!}{z!(x_1-z)!(y_1-z)!(n-x_1-y_1+z)!} \quad p_{22}{}^n \cdot e^{\tau_1 x_1+\tau_2 y_1+\rho z}},$$

$$\tau_1 = \ln \frac{p_{12}}{p_{22}}, \quad \tau_2 = \ln \frac{p_{21}}{p_{22}}.$$

Ved å multiplisere i teller og nevner med $(n-x_1)!x_1!$ fås:

$$P(X_{11}=x_{11} \mid X_{1.}=x_1,\ X_{.1}=y_1)$$

$$= \frac{\binom{x_1}{x_{11}}\binom{n-x_1}{y_1-x_{11}} e^{\rho x_{11}}}{\sum\limits_z \binom{x_1}{z}\binom{n-x_1}{y_1-z} e^{\rho z}}$$

Q.E.D.

De neste 3 lemmaer er fra III.8. (iv).

LEMMA 21. (s. 59)

La $\Delta_{ij} = \dfrac{\partial\Delta}{\partial p_{ij}}$. *Da er* $\Delta_{11} = \dfrac{p_{22}}{p_{12}p_{21}}$, $\Delta_{22} = \dfrac{p_{11}}{p_{12}p_{21}}$, $\Delta_{12} = -\Delta/p_{12}$, $\Delta_{21} = -\Delta/p_{21}$

$\Delta^* = 0$, $S_\Delta^2 = n\ \hat{\Delta}^2 \cdot S^2$.

Bevis:

Resultatene for Δ_{ij} følger direkte. Det gir:

$$\Delta^* = \sum_{i,j} \Delta_{ij} p_{ij} = \Delta-\Delta-\Delta+\Delta = 0,$$

La $\sigma_\Delta^2(p) = \sum\limits_{i,j} p_{ij}\Delta_{ij}^2$

$$\sigma_\Delta^2(p) = \Delta^2\Big(\sum_{i,j} p_{ij} \cdot \frac{1}{p_{ij}^2}\Big) = \Delta^2\Big(\sum_{i,j} p_{ij}^{-1}\Big).$$ Herav:

$$S_\Delta^2 = \hat{\Delta}^2\Big(\sum_{i,j} q_{ij}^{-1}\Big) = n\ \hat{\Delta}^2\Big(\sum_{i,j} X_{ij}^{-1}\Big) = n\ \hat{\Delta}^2 \cdot S^2.$$

Q.E.D.

LEMMA 22. (s. 60)

$$S_\gamma^2 = \frac{4\hat{\Delta}^2}{(\hat{\Delta}+1)^4}\, n\ S^2.$$

Bevis:

Vi ser at $\gamma = 1 - \dfrac{2}{\Delta+1} \Rightarrow \dfrac{\partial\gamma}{\partial p_{ij}} = \dfrac{2\Delta_{ij}}{(\Delta+1)^2}$ og fra lemma 21: $\gamma^* = 0$

$$\Rightarrow \sigma_\gamma^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{4\Delta_{ij}^2}{(\Delta+1)^4} p_{ij} = \frac{4}{(\Delta+1)^4}\,\sigma_\Delta^2$$

og herav: $S_\gamma^2 = \dfrac{4}{(\hat{\Delta}+1)^4} S_\Delta^2 = \dfrac{4\hat{\Delta}^2}{(\hat{\Delta}+1)^4}\, n\, S^2.$

Q.E.D.

LEMMA 23. (s. 61)

a) *Hvis* $S\cdot x(\frac{\alpha}{2}) \leq 1$, *så er* $L_2 < L_1$.

b) *Hvis* $S\cdot x(\frac{\alpha}{2}) \geq 1+\max(\hat{\Delta}^{-1},\hat{\Delta})$, *så er* $L_2 > L_1$.

c) $P(L_2 < L_1) \underset{n\to\infty}{\to} 1$

Bevis:

Det første vi noterer oss er:

$$S\cdot x(\tfrac{\alpha}{2}) \leq 1 \Leftrightarrow \quad L_1 = \frac{\hat{\Delta}(1+x(\frac{\alpha}{2})\cdot S)-1}{\hat{\Delta}(1+x(\frac{\alpha}{2})\cdot S)+1} - \frac{\hat{\Delta}(1-x(\frac{\alpha}{2})\cdot S)-1}{\hat{\Delta}(1-x(\frac{\alpha}{2})\cdot S)+1}$$

$$= \frac{4\hat{\Delta}S\cdot x(\frac{\alpha}{2})}{\hat{\Delta}^2(1-S^2x^2(\frac{\alpha}{2}))+2\hat{\Delta}+1}.$$

Dessuten: $S\cdot x(\frac{\alpha}{2}) \leq 1 \Rightarrow \quad L_2 = \dfrac{4\hat{\Delta}S\cdot x(\frac{\alpha}{2})}{(\hat{\Delta}+1)^2}.$

Herav: $$\frac{L_2}{L_1} = \frac{\hat{\Delta}^2(1-S^2x^2(\frac{\alpha}{2}))+2\hat{\Delta}+1}{(\hat{\Delta}+1)^2} \quad \text{hvis } S\cdot x(\tfrac{\alpha}{2}) \leq 1.$$

Hvis $S\cdot x(\frac{\alpha}{2}) < 1$, ses at $L_2/L_1 < 1$, siden $\hat{\Delta} > 0$ (ingen X_{ij} er lik null).

Dersom $S\cdot x(\frac{\alpha}{2}) = 1$, har vi at $L_2/L_1 = \dfrac{2\hat{\Delta}+1}{(\hat{\Delta}+1)^2} < \dfrac{\hat{\Delta}^2+2\hat{\Delta}+1}{(\hat{\Delta}+1)^2} = 1.$

a) er dermed bevist.

La så $S\cdot x(\frac{\alpha}{2}) > 1$. Da vil $L_1 = \dfrac{\hat{\Delta}(1+x(\frac{\alpha}{2})S)-1}{\hat{\Delta}(1+x(\frac{\alpha}{2})S)+1} + 1 = \dfrac{2\hat{\Delta}(1+x(\frac{\alpha}{2})\cdot S)}{\hat{\Delta}(1+x(\frac{\alpha}{2})\cdot S)+1}$ $\quad (x(\frac{\alpha}{2}) > 0$ for $0<\alpha<1)$.

Øvre grense i (158) er lik 1 hvis og bare hvis

$$Sx(\tfrac{\alpha}{2}) \geq 1+\hat{\Delta}^{-1}.$$

Nedre grense i (158) er lik -1 hvis og bare hvis

$$Sx(\tfrac{\alpha}{2}) \geq 1+\hat{\Delta}.$$

Anta at $S\cdot x(\frac{\alpha}{2}) \geq 1+\max(\hat{\Delta}^{-1},\hat{\Delta}) = \max(1+\hat{\Delta}^{-1},1+\hat{\Delta})$. Da er $L_2 = 2$,

og $\quad L_2/L_1 = \dfrac{\hat{\Delta}(1+x(\frac{\alpha}{2})\cdot S)+1}{\hat{\Delta}(1+x(\frac{\alpha}{2})\cdot S)} > 1.$ Hermed er b) bevist.

Fra a) has at $\lim_{n\to\infty} P(L_2 < L_1) \geq \lim_n P(S^2 \leq x^{-2}(\frac{\alpha}{2}))$.

Nå er X_{ij} binomisk (n, p_{ij}). Dermed vil

$$\frac{X_{ij}-np_{ij}}{\sqrt{np_{ij}(1-p_{ij})}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

La $y > 0$:

$$P(X_{ij}^{-1} \leq y) = P(X_{ij} \geq y^{-1}) = 1-P(\frac{X_{ij}-np_{ij}}{\sqrt{np_{ij}(1-p_{ij})}} < \frac{y^{-1}-np_{ij}}{\sqrt{np_{ij}(1-p_{ij})}})$$

La $y_n = \frac{y^{-1}-np_{ij}}{\sqrt{np_{ij}(1-p_{ij})}}$, $y_n \downarrow -\infty$. Dermed vil $\Phi(y_n) \downarrow 0$.

Fra korollar A has at

$$P(\frac{X_{ij}-np_{ij}}{\sqrt{np_{ij}(1-p_{ij})}} \leq y_n) - \Phi(y_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Setn. H gir dermed:

$$\lim_n P(\frac{X_{ij}-np_{ij}}{\sqrt{np_{ij}(1-p_{ij})}} < y_n) = \lim_n P(\frac{X_{ij}-np_{ij}}{\sqrt{np_{ij}(1-p_{ij})}} \leq y_n) = 0.$$

Herav: $P(X_{ij}^{-1} \leq y) \underset{n\to\infty}{\to} 1$.

La nå $s > 0$. Da has at $X_{ij}^{-1} \leq \frac{s}{4}$ for $i=1,2$ og $j=1,2 \Rightarrow S^2 \leq s$.

Dette gir:

$$\lim_n P(S^2 \leq s) \geq \lim_n P\{\bigcap_{i=1}^{2} \bigcap_{j=1}^{2} (X_{ij}^{-1} \leq s/4)\} = 1-\lim_n P\{\bigcup_{i=1}^{2} \bigcup_{j=1}^{2} (X_{ij}^{-1} > \frac{s}{4})\}$$

$$\geq 1-\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \lim_n P(X_{ij}^{-1} > \frac{s}{4}) = 1.$$

Spesielt vil $\lim_n P(S^2 \leq x^{-2}(\frac{\alpha}{2})) = 1$, og dermed $\lim_n P(L_2 > L_1) = 1$.

Q.E.D.

I neste lemma skal gis K-estimatoren for den asymptotiske varians til

$$\sqrt{n}\,\hat{\beta} = \sqrt{n}\,\frac{(q_{11}q_{22}-q_{12}q_{21})^2}{q_{1.}q_{2.}q_{.1}q_{.2}}.$$

LEMMA 24. (s. 61)

$$S_\beta^2 = \hat{\mu}^{-4}\,\hat{\theta}^2\,\{q_{11}b_{22}^2+q_{22}b_{11}^2+q_{12}b_{11}^2+q_{12}b_{21}^2+q_{21}b_{12}^2-(q_{11}b_{22}+q_{22}b_{11}-q_{12}b_{21}-q_{21}b_{12})^2\}$$

hvor $\hat{\mu} = q_{1.}q_{2.}q_{.1}q_{.2}$

$$\hat{\theta} = q_{11}q_{22}-q_{12}q_{21}$$

$$b_{ij} = q_{i.}q_{.j}\ \{q_{i.}q_{.j}(2-q_{i.}-q_{.j})-q_{ij}(q_{i.}+q_{.j}-2q_{i.}q_{.j})\}$$

Bevis:

Fra (49):

$$S_\beta^2 = \sum_{i=1}^{2}\ \sum_{j=1}^{2} q_{ij}(\hat{\beta}_{ij}-\hat{\beta}^*)^2 \text{ hvor } \hat{\beta}_{ij} = \frac{\partial\hat{\beta}}{\partial q_{ij}} \text{ og } \hat{\beta}^* = \sum_{i=1}^{2}\ \sum_{j=1}^{2}\hat{\beta}_{ij}q_{ij}.$$

La oss først finne $\hat{\beta}_{ij}$-ene.

La $M = (q_{11}q_{22}-q_{12}q_{21})^2 = \hat{\theta}^2$.

$$\hat{\beta} = \frac{M}{\hat{\mu}} \qquad \hat{\beta}_{ij} = \frac{1}{\hat{\mu}^2}\{\frac{\partial M}{\partial q_{ij}}\hat{\mu} - M\frac{\partial\hat{\mu}}{\partial q_{ij}}\}.$$

$$\frac{\partial M}{\partial q_{11}} = 2\hat{\theta}\cdot q_{22},\ \frac{\partial M}{\partial q_{22}} = 2\hat{\theta}\cdot q_{11},\ \frac{\partial M}{\partial q_{12}} = -2\hat{\theta}\cdot q_{21} \text{ og } \frac{\partial M}{\partial q_{21}} = -2\hat{\theta}\cdot q_{12}.$$

$$\frac{\partial\hat{\mu}}{\partial q_{11}} = q_{2.}q_{.2}(q_{1.}+q_{.1}),\ \frac{\partial\hat{\mu}}{\partial q_{22}} = q_{1.}q_{.1}(q_{2.}+q_{.2})$$

$$\frac{\partial\hat{\mu}}{\partial q_{12}} = q_{2.}q_{.1}(q_{1.}+q_{.2}),\ \frac{\partial\hat{\mu}}{\partial q_{21}} = q_{1.}q_{.2}(q_{2.}+q_{.1})$$

Ovenstående medfører at:

$$\hat{\beta}_{11} = \hat{\mu}^{-2}\{2\hat{\theta}\hat{\mu}\cdot q_{22}-\hat{\theta}^2\cdot q_{2.}q_{.2}(q_{1.}+q_{.1})\}$$

$$= \hat{\mu}^{-2}\hat{\theta}\{2q_{1.}q_{.1}q_{2.}q_{.2}q_{22}-(q_{11}q_{22}-q_{12}q_{21})q_{2.}q_{.2}(q_{1.}+q_{.1})\}$$

$$= \hat{\mu}^{-2}\hat{\theta}\{q_{2.}q_{.2}(2q_{22}q_{1.}q_{.1}-(q_{22}-q_{2.}q_{.2})(q_{1.}+q_{.1}))\}$$

$$= \hat{\mu}^{-2}\hat{\theta}\{q_{2.}q_{.2}(q_{2.}q_{.2}(q_{1.}+q_{.1})-q_{22}(q_{1.}+q_{.1}-2q_{1.}q_{.1}))\}$$

$$= \hat{\mu}^{-2}\hat{\theta}\{q_{2.}q_{.2}(q_{2.}q_{.2}(2-q_{2.}-q_{.2})-q_{22}(q_{1.}(1-q_{.1})+q_{.1}(1-q_{1.})))\}$$

$$= \hat{\mu}^{-2}\hat{\theta}\{q_{2.}q_{.2}(q_{2.}q_{.2}(2-q_{2.}-q_{.2})-q_{22}(q_{1.}q_{.2}+q_{2.}q_{.1}))\}$$

$$= \hat{\mu}^{-2}\hat{\theta}\{q_{2.}q_{.2}(q_{2.}q_{.2}(2-q_{2.}-q_{.2})-q_{22}(q_{2.}+q_{.2}-2q_{2.}q_{.2}))\} = \hat{\mu}^{-2}\hat{\theta}b_{22}.$$

Tilsvarende fås: $\hat{\beta}_{22} = \hat{\mu}^{-2}\hat{\theta}b_{11}$

$\hat{\beta}_{12} = -\hat{\mu}^{-2}\hat{\theta}b_{21}$

og $\hat{\beta}_{21} = -\hat{\mu}^{-2}\hat{\theta}b_{12}$.

Herav følger:

$$S_\beta^2 = \sum_{i=1}^{2}\ \sum_{j=1}^{2} q_{ij}\hat{\beta}_{ij}^2-(\Sigma q_{ij}\hat{\beta}_{ij})^2 = \hat{\mu}^{-4}\hat{\theta}^2\{(q_{11}b_{22}^2+q_{22}b_{11}^2+q_{12}b_{21}^2+q_{21}b_{12}^2)-$$

$$(q_{11}b_{22}+q_{22}b_{11}-q_{12}b_{21}-q_{21}b_{12})^2\}.$$

Q.E.D.

Neste setning sammenligner lengden av to konfidensintervaller for

$$\tau_b = \frac{p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21}}{\sqrt{p_{1\cdot}p_{2\cdot}p_{\cdot 1}p_{\cdot 2}}}$$

L_1^* er lengden til intervallet: $\left\langle -(\hat\beta + \frac{S_\beta}{\sqrt{n}}\,x(\frac{\alpha}{2}))^{\frac12},\ (\hat\beta + \frac{S_\beta}{\sqrt{n}}\,x(\frac{\alpha}{2}))^{\frac12} \right\rangle$

og L_2^* er lengden til intervallet: $\left\langle \hat\tau_b - \frac{S_\beta}{2|\hat\tau_b|\sqrt{n}}\,x(\frac{\alpha}{2}),\ \hat\tau_b + \frac{S_\beta}{2|\hat\tau_b|\sqrt{n}}\,x(\frac{\alpha}{2}) \right\rangle$.

LEMMA 25. (s. 62)

(a) $\left(\frac{L_1^*}{L_2^*}\right)^2 = \frac{4\hat\tau_b^2\sqrt{n}}{S_\beta\,x(\frac{\alpha}{2})}\left[\frac{\hat\tau_b^2\sqrt{n}}{S_\beta\,x(\frac{\alpha}{2})} + 1\right]$

(b) $C_1 > 0 \Rightarrow L_2^* < \frac{\sqrt{2}}{4}L_1^*$

(c) $L_1^*/L_2^* > 1 \iff \frac{\hat\tau_b^2\sqrt{n}}{S_\beta\,x(\frac{\alpha}{2})} > \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ (=0,207)

(d) $\lim_{n\to\infty} P(L_2^* < L_1^*) = 1$

Bevis:

(a) Vi finner:

$$\left.\begin{aligned} L_1^* &= 2(\hat\beta + \frac{S_\beta}{\sqrt{n}}\,x(\tfrac{\alpha}{2}))^{\frac12} \\ L_2^* &= \frac{S_\beta}{|\hat\tau_b|\sqrt{n}}\,x(\tfrac{\alpha}{2}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} (L_1^*)^2 &= 4(\hat\tau_b^2 + \frac{S_\beta}{\sqrt{n}}\,x(\tfrac{\alpha}{2})) \\ (L_2^*)^2 &= \frac{S_\beta^2}{\hat\tau_b^2 n}\,x(\tfrac{\alpha}{2}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{L_1^*}{L_2^*}\right)^2 = \frac{4(\hat\tau_b^2 + \frac{S_\beta}{\sqrt{n}}\,x(\frac{\alpha}{2}))\hat\tau_b^2 n}{S_\beta^2\,x^2(\frac{\alpha}{2})} = \frac{4\hat\tau_b^2\sqrt{n}}{S_\beta\,x(\frac{\alpha}{2})}\left[\frac{\hat\tau_b^2\sqrt{n}+S_\beta x(\frac{\alpha}{2})}{S_\beta\,x(\frac{\alpha}{2})}\right]$$

$$= \frac{4\hat\tau_b^2\sqrt{n}}{S_\beta\,x(\frac{\alpha}{2})}\left[\frac{\hat\tau_b^2\sqrt{n}}{S_\beta\,x(\frac{\alpha}{2})} + 1\right]$$

(b) $C_1 > 0 \iff \hat\tau_b^2 > \frac{S_\beta}{\sqrt{n}}\,x(\frac{\alpha}{2}) \iff \hat\tau_b^2\sqrt{n} > S_\beta\,x(\frac{\alpha}{2})$

$$\overset{(a)}{\Rightarrow} \left(\frac{L_1^*}{L_2^*}\right)^2 > 4(1+1) = 8 \iff \frac{L_1^*}{L_2^*} > 2\sqrt{2} \iff L_2^* < \frac{1}{2\sqrt{2}}L_1^* = \frac{\sqrt{2}}{4}L_1$$

(c) $\frac{L_1^*}{L_2^*} > 1 \iff \frac{4\hat\tau_b^2\sqrt{n}(\hat\tau_b^2\sqrt{n}+S_\beta x(\frac{\alpha}{2}))}{S_\beta^2 x^2(\frac{\alpha}{2})} > 1 \iff 4\hat\tau_b^4 n + 4\hat\tau_b^2\sqrt{n}S_\beta x > S_\beta^2 x^2$, hvor $x = x(\frac{\alpha}{2})$.

La $y = \hat{\tau}_b^2\sqrt{n}$ og $b = S_\beta \cdot x$, $y \geq 0$, $b > 0$. Det følger nå at

$$\frac{L_1^*}{L_2^*} > 1 \iff y^2+by > \frac{1}{4}b^2 \iff y^2+by - \frac{b^2}{4} > 0.$$

Ved å løse likningen $y^2+by-\frac{b^2}{4}=0$, finner vi $y = \frac{\pm\sqrt{2}-1}{2}\, b$. Herav

$$y^2+by-\frac{b^2}{4}=(y-\frac{\sqrt{2}-1}{2}\,b)(y+\frac{\sqrt{2}+1}{2}\,b) \text{ slik at}$$

$$\frac{L_1^*}{L_2^*} > 1 \iff (y-\frac{\sqrt{2}-1}{2}\,b)(y+\frac{\sqrt{2}+1}{2}\,b) > 0 \iff y-\frac{\sqrt{2}-1}{2}\,b > 0 \text{ (siden } y\geq 0,\ b>0)$$

$$\iff y > \frac{\sqrt{2}-1}{2}\,b \iff \frac{y}{b} > \frac{\sqrt{2}-1}{2} \iff \frac{\hat{\tau}_b^2\sqrt{n}}{S_\beta x} > \frac{\sqrt{2}-1}{2} = 0{,}207$$

(d) $$\lim_{n\to\infty} P(L_2^* < L_1^*) = \lim_{n\to\infty} P(\frac{L_1^*}{L_2^*} > 1) \overset{(c)}{=} \lim_{n\to\infty} P(\frac{\hat{\tau}_b^2\sqrt{n}}{S_\beta} > \frac{\sqrt{2}-1}{2}\, x).$$

Som før nevnt, vil de forutsetninger som gjøres for å danne konfidens-intervall for $\hat{\tau}_b^2$, medføre at $\tau_b^2 > 0$, slik at intervallet (162) har bare mening når vi antar $\tau_b \neq 0$. I såfall vil

$$\frac{\hat{\tau}_b^2}{S_\beta} \overset{P}{\to} \frac{\tau_b^2}{\sigma_\beta} = a > 0.$$

Dette gir at

$$\lim_n P(\frac{\hat{\tau}_b^2}{S_\beta} \leq t) \Rightarrow \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases}$$

La så $Y_n = \sqrt{n}\,\frac{\hat{\tau}_b^2}{S_\beta}$, og la $k > 0$, $P(Y_n > k) = P(\frac{\hat{\tau}_b^2}{S_\beta} > \frac{k}{\sqrt{n}})$.

For en valgt $t \in \langle 0,a\rangle$ eksisterer N s.a. for $n \geq N$ så er $\frac{k}{\sqrt{n}} < t$.
Dermed has for $n \geq N$:

$$P(\frac{\hat{\tau}_b^2}{S_\beta} > \frac{k}{\sqrt{n}}) \geq P(\frac{\hat{\tau}_b^2}{S_\beta} > t) = 1 - P(\frac{\hat{\tau}_b^2}{S_\beta} \leq t),$$

hvilket gir:

$$\lim_n P(Y_n > k) = 1. \text{ Spesielt gjelder dette for } k = \frac{\sqrt{2}-1}{2}\, x,$$

hvilket gir (d).

Q.E.D.

DEL 2: MULTIPPEL INFERENS I KONTINGENSTABELLER.

I. INNLEDNING.

I del 1 var vårt utgangspunkt å undersøke avhengighet i en bestemt kontingenstabell. Nå skal vi diskutere multippel sammenligning av avhengighetsmål i flere tabeller. Tre forskjellige multiple testmetoder utvikles. Spesielt behandles sammenligning av 2x2-tabeller. La oss først gi noen forutsetninger og notasjoner.

I.1. Forutsetninger og notasjoner.

Betrakt K toveis kontingenstabeller. La antall kjennetegn for A- og B-faktoren i k-te tabell være henholdsvis v_k og w_k, og la $\nu_k = v_k \cdot w_k$, for $k=1,\ldots,K$. La p_{ijk} betegne cellesannsynlighetene i k-te tabell, slik at

$$\sum_{i=1}^{v_k} \sum_{j=1}^{w_k} p_{ijk} = 1 \tag{1}$$

for $k=1,\ldots,K$.

Videre lar vi X_{ijk} være antall observasjoner i celle (i,j) i k-te tabell; for $k=1,\ldots,K$. De relative hyppighetene betegnes med $q_{ijk} = X_{ijk}/n_k$, hvor n_k er antall observasjoner i k-te tabell. La $n = \sum_{k=1}^{K} n_k$ og $\pi_k = n_k/n$. π_k-ene betraktes som konstanter når n går mot uendelig. Følgende vektornotasjoner vil anvendes:

$$p_k = (p_{11k}, p_{12k}, \ldots, p_{1w_k k}, p_{21k}, \ldots, p_{v_k w_k, k})$$

$$q_k = (q_{11k}, q_{12k}, \ldots, q_{1w_k k}, q_{21k}, \ldots, q_{v_k w_k, k}) \tag{2}$$

$$p = (p_1, \ldots, p_K)$$

$$q = (q_1, \ldots, q_K)$$

Det antas at forsøksrekkene i hver tabell er innbyrdes uavhengige, slik at de tilfeldige variable $q_1, \ldots, q_K$ er stokastisk uavhengige.

La nå d være et avhengighetsmål, med kontinuerlige partielle deriverte som funksjon av cellesannsynlighetene. (Merk: Resultatene gitt nedenfor vil under visse betingelser også holde for målene λ, λ_b og λ_r fra del 1, kapitel III.)

La videre d_k være målet d i k-te tabell, for k=1, ..., K. Da er d_k en funksjon i ν_k variable med kontinuerlige partielle deriverte. Dvs. $d_k = d_k(p_k)$. La $\hat{d}_k = d_k(q_k)$, for k=1, ..., K. Tilsvarende notasjoner som i del 1 benyttes:

$$\sigma^2_{d,k} = \sum_{i=1}^{v_k} \sum_{j=1}^{w_k} p_{ijk}(d_{ij,k} - d^*_k)^2 \tag{3}$$

hvor

$$d_{ij,k} = \frac{\partial d_k}{\partial p_{ijk}} \qquad \text{for } i=1, \ldots, v_k \text{ og } j=1, \ldots, w_k.$$

og

$$d^*_k = \sum_{i=1}^{v_k} \sum_{j=1}^{w_k} d_{ij,k}\, p_{ijk} \qquad \text{for } k=1, \ldots, K.$$

En konsistent estimator for $\sigma^2_{d,k}$ er gitt ved:

$$S^2_{d,k} = \sum_{i=1}^{v_k} \sum_{j=1}^{w_k} q_{ijk} \, (\hat{d}_{ij,k} - \hat{d}^*_k)^2 \tag{4}$$

hvor

$$\hat{d}_{ij,k} = d_{ij,k}(q_k)$$

og

$$\hat{d}^*_k = d^*_k(q_k)$$

Det antas at ingen p_{ijk} er lik null, og videre at for alle k=1, ..., K eksisterer i,j slik at

$$d_{ij,k} \neq d^*_k \tag{5}$$

(dvs. at $\sigma^2_{d,k} > 0$ for k=1, ..., K).

Antagelsene og betegnelsene ovenfor vil vi forutsette holder i hele del 2, og de vil derfor ikke bli gjentatt. Alle resultater vil gjelde asymptotisk. Ved anvendelse av metodene antas n stor, slik at alle resultater holder tilnærmet.

I.2. Asymptotisk fordelingsteori.

De grunnleggende setningene som vi får bruk for er følgende tre teoremer (for bevis henvises til appendikset).

TEOREM 6.

For $i \neq j$, $i = 1, \ldots, K$ og $j = 1, \ldots, K$ gjelder:

$$T_{ij} = \frac{\hat{d}_i - \hat{d}_j - (d_i - d_j)}{\left(\frac{S^2_{d,i}}{n_i} + \frac{S^2_{d,j}}{n_j}\right)^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{D} N(0,1). \tag{6}$$

TEOREM 7.

$$U = n \sum_{k=1}^{K} \frac{\pi_k(\hat{d}_k - \hat{d})^2}{S^2_{d,k}} \xrightarrow{D} \chi^2_{K-1} \qquad \text{når } d_1 = d_2 = \ldots = d_K \tag{7}$$

Her er:

$$\hat{d} = \sum_{i=1}^{K} \frac{n_i \hat{d}_i}{S^2_{d,i}} \Big/ \sum_{i=1}^{K} \frac{n_i}{S^2_{d,i}} = \sum_{i=1}^{K} \frac{\pi_i \hat{d}_i}{S^2_{d,i}} \Big/ \sum_{i=1}^{K} \frac{\pi_i}{S^2_{d,i}}. \tag{8}$$

TEOREM 8.

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{n_k(\hat{d}_k - d_k)^2}{S^2_{d,k}} \xrightarrow{D} \chi^2_K. \tag{9}$$

II. MULTIPLE INFERENSMETODER FOR KONTINGENSTABELLER.

II.1. Multiple normal-tester.

La oss anta at d er et passende avhengighetsmål i de kontingenstabeller vi ønsker å sammenligne (for valg av d, se del 1 - kapitel III). Som i del 1 lar vi $x(\alpha)$ være $(1-\alpha)$-fraktilen i $N(0,1)$. Det er ialt $\binom{K}{2}$ forskjellige differenser $d_i - d_j$, $i < j$. Simultane konfidensintervaller for differenser i d_k-ene fås av følgende:

$$P(T_{ij} \leq x\left(\frac{\alpha}{K(K-1)}\right) \text{ for alle i og j, } i \neq j)$$

$$= 1 - P\left(\bigcup_{i\neq j} T_{ij} > x\left(\frac{\alpha}{K(K-1)}\right)\right)$$

$$= 1 - P\left(\bigcup_{i<j} |T_{ij}| > x\left(\frac{\alpha}{K(K-1)}\right)\right) \quad (\text{fordi } T_{ij} = -T_{ji})$$

$$\geq 1 - \sum_{i<j} P\left(|T_{ij}| > x\left(\frac{\alpha}{K(K-1)}\right)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - \sum_{i<j} \frac{2\alpha}{K(K-1)}$$

$$= 1 - \frac{2\alpha}{K(K-1)}\binom{K}{2} = 1 - \alpha.$$

Herav følger:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\hat{d}_i - \hat{d}_j - x\left(\frac{\alpha}{K(K-1)}\right)\sqrt{\frac{S^2_{d,i}}{n_i} + \frac{S^2_{d,j}}{n_j}} \leq d_i - d_j \leq \right.$$

$$\left. \hat{d}_i - \hat{d}_j + x\left(\frac{\alpha}{K(K-1)}\right)\sqrt{\frac{S^2_{d,i}}{n_i} + \frac{S^2_{d,j}}{n_j}} \quad \text{for alle } i\neq j\right) \geq 1-\alpha. \tag{10}$$

Simultane konfidensintervaller med asymptotisk konfidensgrad $P \geq 1-\alpha$, for differenser $d_i - d_j$ er dermed gitt ved (10).

La oss nå betrakte hypotesen:

$$H: \; d_1 = d_2 = \ldots = d_K \tag{11}$$

og la

$$H_{ij}: \; d_i = d_j. \tag{12}$$

Vi forkaster H_{ij} hvis intervallet (10) for $d_i - d_j$ ikke omfatter 0. Dvs. hvis

$$|T^{o}_{ij}| = \frac{|\hat{d}_i - \hat{d}_j|}{\sqrt{\frac{S^2_{d,i}}{n_i} + \frac{S^2_{d,j}}{n_j}}} > x\left(\frac{\alpha}{K(K-1)}\right) \tag{13}$$

Testkriteriet (13) gir følgende naturlige test for sammenligning av d_i-ene:

Multiple normal-tester (N-tester).

Påstå $d_i > d_j$ hvis H_{ij} forkastes og $\hat{d}_i > \hat{d}_j$, dvs. hvis

$$T^o_{ij} > x\left(\frac{\alpha}{K(K-1)}\right) \tag{14}$$

La oss først se på sannsynligheten for minst en gal påstand "$d_i > d_j$" under H.

Begivenheten {minst en gal påstand under H} er lik $\bigcup_{i \neq j}$ {påstå $d_i > d_j$}

$= \bigcup_{i<j}$ {påstå $d_i \neq d_j$} $= \bigcup_{i<j}$ {forkaste H_{ij}},

og $P_H(\bigcup_{i<j}$ forkaste $H_{ij}) = 1 - P_H$(alle intervallene (10) omfatter 0)

$= 1 - P_H$(alle intervallene omfatter $d_i - d_j$) $\leq 1-(1-\alpha) = \alpha$.

Videre, siden $\hat{d}_i$ og $\hat{d}_j$ er konsistente estimatorer for henholdsvis d_i og d_j, så vil

$$\hat{d}_i - \hat{d}_j \xrightarrow{D} d_i - d_j, \text{ slik at}$$

$$\lim_{n\to\infty} P(\hat{d}_i - \hat{d}_j > x) = \begin{cases} 1 & x < d_i - d_j \\ 0 & x > d_i - d_j \end{cases} \tag{15}$$

Herav sees at

$$\lim_{n\to\infty} P(\text{påstå } d_i > d_j \mid d_i < d_j) \leq \lim_{n\to\infty} P(\hat{d}_i - \hat{d}_j > 0 \mid d_i - d_j < 0) = 0.$$

Det sees også lett fra teorem 6 at

$$\lim_{n\to\infty} P\,(\text{påstå } d_i > d_j \mid H_{ij}) = \alpha/K(K-1).$$

Følgende resultater er dermed vist:

LEMMA 26.

a) $\lim_{n\to\infty}$ P(minst en gal påstand "$d_i > d_j$"$|$H) $\leq \alpha$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} P(\text{påstå } d_i > d_j \mid d_i < d_j) = 0$ (16)

c) $\lim\limits_{n\to\infty} P(\text{påstå } d_i > d_j \mid d_i = d_j) = \alpha/K(K-1)$.

La oss nå betrakte sannsynligheten for minst en gal påstand: $d_i > d_j$, generelt. For det formål følger vi Spjøtvoll, [18], og definerer indeksmengdene V_i for $i=1, \ldots, t$.

$$V_i \subset \{1, 2, \ldots, K\}, \quad V_i \cap V_j = \emptyset \text{ for } i \neq j \text{ og}$$

$$\bigcup_{i=1}^{t} V_i = \{1, 2, \ldots, K\}$$

La videre v_i være antall indekser i V_i, slik at $\sum\limits_{i=1}^{t} v_i = K$.

Definisjon 13. $\omega(V_1, \ldots, V_t)$ er mengden av alle $d_1, \ldots, d_K, \sigma^2_{d,1}, \ldots, \sigma^2_{d,K}$, slik at $d_i = d_j$ når $i,j \in V_h$ og $d_i \neq d_j$ når i og j tilhører forskjellige V_h-er

La $\underline{d} = (d_1, \ldots, d_K)$ og $\underline{\sigma}_d = (\sigma_{d,1}, \ldots, \sigma_{d,K})$. La videre $\alpha(d_1, \ldots, d_K, \sigma_{d,1}, \ldots, \sigma_{d,K}) = \alpha(\underline{d}, \underline{\sigma}_d)$ være sannsynligheten for minst en gal påstand "$d_i > d_j$".

Da gjelder:

TEOREM 9.

For $(\underline{d}, \underline{\sigma}_d) \in \omega(V_1, \ldots, V_t)$ *vil*

$$\text{a)}\ \lim_n \alpha(d_1, \ldots, d_K, \underline{\sigma}_d) = \lim_n P\Big(\bigcup_{h=1}^{t} \max_{i,j \in V_h} T^o_{ij} > x\big(\tfrac{\alpha}{K(K-1)}\big)\Big)$$

$$= 1 - \prod_{h=1}^{t} \lim_n P\Big(\max_{i,j \in V_h} T^o_{ij} \leq x\big(\tfrac{\alpha}{K(K-1)}\big)\Big)$$

$$\text{b)}\ \lim_n \alpha(d_1, \ldots, d_K, \underline{\sigma}_d) \leq \Big(1 - \frac{t-1}{K}\Big)\Big(1 - \frac{t-1}{K-1}\Big)\alpha \tag{17}$$

Bevis:

a) Fra lemma 26b) følger at for $(\underline{d}, \underline{\sigma}_d) \in \omega(V_1, \ldots, V_t)$:

$$\lim_n P\Big(\bigcup_{g \neq h} \bigcup_{i \in V_g} \bigcup_{j \in V_h} (\text{gal påstand "} d_i > d_j \text{"})\Big) = 0 \tag{18}$$

Dette gir:

$$\lim_n \alpha(d_1, \ldots, d_K, \underline{\sigma}_d) = \lim_n P\Big(\bigcup_{g \neq h} \bigcup_{i \in V_g} \bigcup_{j \in V_h} (\text{gal påstand: } d_i > d_j)$$

$$\cup \bigcup_{h=1}^{t} \bigcup_{\substack{i \neq j \\ i,j \in V_h}} (\text{påstå: } d_i > d_j)\Big)$$

$$= \lim_n P\Big(\bigcup_{h=1}^{t} \bigcup_{\substack{i \neq j \\ i,j \in V_h}} (\text{påstå } d_i > d_j)\Big) = \lim_n P\Big(\bigcup_{h=1}^{t} \bigcup_{\substack{i < j \\ i,j \in V_h}} (\text{påstå } d_i \neq d_j)\Big)$$

$$= \lim_n P\Big(\bigcup_{h=1}^{t} \bigcup_{\substack{i < j \\ i,j \in V_h}} |T^o_{ij}| > x\big(\tfrac{\alpha}{K(K-1)}\big)\Big) \tag{19}$$

$$= \lim_n P\Big(\bigcup_{h=1}^{t} \max_{i,j \in V_h} T^o_{ij} > x\big(\tfrac{\alpha}{K(K-1)}\big)\Big) = 1 - \lim_n P\Big(\bigcap_{h=1}^{t} \max_{i,j \in V_h} T^o_{ij}$$

$$\leq x\big(\tfrac{\alpha}{K(K-1)}\big)\Big)$$

$$= 1 - \lim_n \prod_{h=1}^{t} P\big(\max_{i,j \in V_h} T^o_{ij} \leq x\big(\tfrac{\alpha}{K(K-1)}\big)\big),$$ siden $Y_1, \ldots, Y_t$ er stokastisk uavhengige, hvor $Y_h = \max_{i,j \in V_h} T^o_{ij}$.

b) Fra (19) has:

$$\lim_n \alpha(d_1, \ldots, d_K, \underline{\sigma}_d) \leq \sum_{h=1}^{t} \sum_{\substack{i<j \\ i,j \in V_h}} \lim_n P\big(|T^o_{ij}| > x\big(\tfrac{\alpha}{K(K-1)}\big)\big)$$

$$= \sum_{h=1}^{t} \sum_{\substack{i<j \\ i,j \in V_h}} \frac{2\alpha}{K(K-1)} = \frac{2\alpha}{K(K-1)} \sum_{h=1}^{t} \frac{v_h(v_h-1)}{2}$$

$$= \frac{\alpha}{K(K-1)} \left[\sum_{h=1}^{t} v_h^2 - K \right].$$

La oss nå betrakte $\sum_{h=1}^{t} v_h^2$. I appendikset blir det vist at den maksimale verdi inntreffer når (t-1) v_h-er er lik 1 og en er lik K-(t-1). Dvs.:

$$\sum_{h=1}^{t} v_h^2 \leq (K-t+1)^2 + t - 1.$$

Herav:

$$\lim_{n} \alpha(d_1, \ldots, d_K, \underline{\sigma}_d) \leq \frac{\alpha}{K(K-1)} \left[(K-t+1)^2 + t - 1 - K\right]$$

$$= \frac{\alpha}{K(K-1)} (K-t+1) \left[K - t + 1 - 1\right]$$

$$= \frac{(K-t+1)(K-t)}{K(K-1)} \alpha = (1 - \frac{t-1}{K})(1 - \frac{t-1}{K-1})\alpha \qquad \textit{Q.E.D.}$$

Den øvre skranken i b) avtar når t øker og har sin maksimumsverdi for t=1. Dvs. at uansett $(\underline{d}, \underline{\sigma}_d)$ så er

$$\lim_{n} \alpha(\underline{d}, \underline{\sigma}_d) \leq \alpha \tag{20}$$

La oss tabellere $(1 - \frac{t-1}{K})(1 - \frac{t-1}{K-1})$ for noen verdier av K og t.

K \ t	1	2	3	4	5	...	9	...	19
2	1	0							
3	1	0,333	0						
4	1	0,5	0,167	0					
5	1	0,6	0,3	0,1	0				
10	1	0,8	0,622	0,467	0,333		0,022		
20	1	0,9	0,805	0,716	0,632		0,347		0,005

II.2. MSD-testen for kontingenstabeller.

Tittelen på testen er valgt på grunn av analogien med Fishers MSD-test (minst signifikante differens-test for rangering av forventninger i variansanalysen, se f. eks. [13], s. 90).

Vi betrakter igjen hypotesen (11):

$$H: d_i = d_2 = \ldots = d_K.$$

Fra teorem 7 sees at følgende test gir asymptotisk nivå lik α.

Forkast H hvis

$$U = n \sum_{i=1}^{K} \frac{\pi_i(\hat{d}_i - \hat{d})^2}{S^2_{d,i}} > z(K-1,\alpha) \tag{21}$$

hvor, som i del 1, $z(K-1,\alpha)$ er øvre α-fraktil i kjikvadrat-fordelingen med K-1 frihetsgrader. Goodman betrakter i [4], avsnitt 4 noen hypoteser på formen H, for sammenligning av 2x2 tabeller. Testene som angis vil være spesialtilfeller av (21).

MSD-testen for differenser $d_i - d_j$ består av to trinn:

Trinn 1. Tester H med (21)

a) Dersom H aksepteres, så stoppes prosedyren.

b) Hvis H forkastes, går vi til trinn 2.

Trinn 2. Sammenligner $\hat{d}_i$-ene parvis og påstår:

$d_i > d_j$ hvis $T^o_{ij} > x(\frac{\alpha}{2})$, dvs. hvis

$$\hat{d}_i - \hat{d}_j > x(\tfrac{\alpha}{2}) \left\{ \frac{S^2_{d,i}}{n_i} + \frac{S^2_{d,j}}{n_j} \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{22}$$

Siden begivenheten $\{$minst en gal påstand "$d_i > d_j$" under H$\}$

$\Rightarrow U > z(K-1, \alpha)$, så er

$$\lim_n P_H(\text{minst en gal påstand: } d_i > d_j) \leq \lim_n P_H(U > z(K-1,\alpha)) = \alpha.$$

Dessuten vil

$$\{\text{påstå } d_i > d_j\} \Rightarrow \left\{ \hat{d}_i - \hat{d}_j > x(\tfrac{\alpha}{2}) \sqrt{\frac{S^2_{d,i}}{n_i} + \frac{S^2_{d,j}}{n_j}} \right\} \Rightarrow \hat{d}_i - \hat{d}_j > 0$$

Fra (15) følger dermed at

$$\lim_n P(\text{påstå } d_i > d_j \mid d_i < d_j) = 0$$

siden: $\{\text{påstå } d_i > d_j\} \Rightarrow \{T^o_{ij} > x(\frac{\alpha}{2})\}$ har vi også at

$$\lim_n P(\text{påstå } d_i > d_j \mid d_i = d_j) \leq \frac{\alpha}{2}.$$

Følgende egenskaper ved MSD-testen er dermed vist:

LEMMA 27.

a) $\lim_n P$ *(minst en gal påstand:* $d_i > d_j \mid H) \leq \alpha$.

b) $\lim_n P$ (*påstå* $d_i > d_j \mid d_i < d_j) = 0$ (23)

c) $\lim_n P$ (*påstå* $d_i > d_j \mid d_i = d_j) \leq \frac{\alpha}{2}$.

Vi følger nå notasjonene i II.1. og lar $\omega(V_1, \ldots, V_t)$ være som i definisjon 13. Neste resultat gir oss $\lim_n \alpha(d_1, \ldots, d_K, \underline{\sigma}_d)$ for MSD-testen.

TEOREM 10.

a) *For* $(d_1, \ldots, d_K, \underline{\sigma}_d) \in \omega(V_1, \ldots, V_t)$ *gjelder:*

$$\lim_n \alpha(d_1, \ldots, d_K, \underline{\sigma}_d) = \begin{cases} \lim_n P(U > z(K-1, \alpha) \cap \max_{i,j} T^o_{ij} > x(\frac{\alpha}{2})), & \textit{for } t=1 \\ \lim_n P(\bigcup_{h=1}^{t} \max_{i,j\in V_h} T^o_{ij} > x(\frac{\alpha}{2})) & \end{cases}$$

$$= 1 - \prod_{h=1}^{t} \lim_n P(\max_{i,j\in V_h} T^o_{ij} \leq x(\tfrac{\alpha}{2})), \quad \textit{for } t \geq 2$$

b) $\lim_n \alpha(d_1, \ldots, d_K, \underline{\sigma}_d) \leq \frac{(K+1-t)(K-t)}{2}\alpha$ *for* $t \geq 2$ (25)

Bevis:

a) Resultatet for $t=1$ (dvs.: $d_1 = \ldots = d_K$) følger direkte. La $t \geq 2$. Som i beviset for teorem 9, vil for $(\underline{d}, \underline{\sigma}_d) \in \omega(V_1, \ldots, V_t)$:

$$\lim_n P(\bigcup_{g \neq h} \bigcup_{i\in V_g} \bigcup_{j\in V_h} (\text{gal påstand: } d_i > d_j)) = 0$$

fra lemma 27b).

Dermed vil:

$$\lim_n \alpha(d_1, \ldots, d_K, \underline{\sigma}_d) = \lim_n P(\bigcup_{g \neq h} \bigcup_{i\in V_g} \bigcup_{j\in V_h} (\text{gal påstand: } d_i > d_j)$$

$$\cup \bigcup_{h=1}^{t} \bigcup_{\substack{i \neq j \\ i,j\in V_h}} (\text{påstå } d_i > d_j))$$

$$= \lim_n P\left(\bigcup_{h=1}^{t} \bigcup_{\substack{i \neq j \\ i,j \in V_h}} (\text{påstå } d_i > d_j)\right)$$

$$= \lim_n P\left(\bigcup_{h=1}^{t} \bigcup_{\substack{i \neq j \\ i,j \in V_h}} (U > z(K-1, \alpha) \cap T^o_{ij} > x(\tfrac{\alpha}{2})\right)$$

$$= \lim_n P\left(U > z(K-1, \alpha) \cap \bigcup_{h=1}^{t} \bigcup_{\substack{i < j \\ i,j \in V_h}} |T^o_{ij}| > x(\tfrac{\alpha}{2})\right)$$

$$= \lim_n P\left(U > z(K-1, \alpha) \cap \bigcup_{h=1}^{t} \max_{i,j \in V_h} T^o_{ij} > x(\tfrac{\alpha}{2})\right).$$

Siden $t \geq 2$ så er minst et par d_i, d_j forskjellige.

La $$V = \sum_{k=1}^{K} \frac{\pi_k (\hat{d}_k - \hat{d})^2}{S^2_{d,k}} \; ; \; U = n \cdot V.$$

Videre vil $$\hat{d} - d_i \xrightarrow{P} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{K} \frac{\pi_k (d_k - d_i)}{\sigma^2_{d,k}} \Big/ \sum_{k=1}^{K} \frac{\pi_k}{\sigma^2_{d,k}} = a > 0$$ (fordi minst en $d_k \neq d_i$)

Dette gir at $\hat{d}_i - \hat{d} = (\hat{d}_i - d_i) - (\hat{d} - d_i) \xrightarrow{P} a > 0.$

Herav:

$$V \xrightarrow{P} a^2 \sum_{k=1}^{K} \frac{\pi_k}{\sigma^2_{d,k}} = b > 0.$$

$$\Rightarrow V - b \xrightarrow{D} 0 \text{ hvilket gir at } P\left(\frac{U - nb}{n} > v\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 \text{ for } v < 0.$$

La nå $0 < \varepsilon < b$. Da has at

$$\frac{U - nb}{n} > -\varepsilon \iff U > n(b - \varepsilon) = nc; \; c > 0.$$

Herav

$$\lim_n P(U > nc) = 1.$$

Det $\exists N$, slik at for $n \geq N$ så vil $nc > z(K-1, \alpha)$. Dvs. $n \geq N$ gir: $P(U > z(K-1, \alpha) \geq P(U > nc)$, slik at

$$\lim_n P(U > z(K-1, \alpha)) = 1.$$

Dvs. testen (21) for H er konsistent. Dette medfører at

$$\lim_n \alpha(d_1, \ldots, d_K, \underline{\sigma}_d) = \lim_n P\Big(\bigcup_{h=1}^{t} \max_{i,j \in V_h} T^o_{ij} > x(\tfrac{\alpha}{2})\Big)$$

$$= 1 - \lim P\Big(\bigcap_{h=1}^{t} \max_{i,j \in V_h} T^o_{ij} \leq x(\tfrac{\alpha}{2})\Big)$$

$$= 1 - \prod_{h=1}^{t} \lim_n P\big(\max_{i,j \in V_h} T^o_{ij} \leq x(\tfrac{\alpha}{2})\big).$$

b) Fra a) has at $\lim\limits_n \alpha(\underline{d}, \underline{\sigma}_d) \leq \sum\limits_{h=1}^{t} \sum\limits_{\substack{i<j \\ i\ j \in V_h}} \lim\limits_n P(|T^o_{ij}| > x(\tfrac{\alpha}{2})) = \alpha \sum\limits_{h=1}^{t} \frac{v_h(v_h-1)}{2}$

$$= \frac{\alpha}{2} \sum_{h=1}^{t} v_h^2 - K \leq \frac{\alpha}{2} [(K-t+1)^2 + t - 1 - K] = \frac{\alpha}{2} (K-t+1)(K-t).$$

Q.E.D.

II.3. Simultane konfidensintervaller for generelle lineærkombinasjoner og produkt-potenser av avhengighetsmål fra K kontingenstabeller.

II.3. (i) Generelle lineære funksjoner $\sum_{i=1}^{K} c_i d_i$.

En prosedyre for multippel sammenligning av generelle lineærfunksjoner i $d_1,\dots,d_K$ kan konstrueres av simultane konfidensintervaller. Konstruksjonen av simultane konfidensintervaller for generelle lineærkombinasjoner $\sum_{i=1}^{K} c_i d_i$ er analog med metoden anvendt av Spjøtvoll i [19].

Fra teorem 8 har vi et asymptotisk $1-\alpha$-konfidensområde for $\underline{d} = (d_1,\dots,d_K)$, gitt ved

$$A(\hat{\underline{d}},\underline{S}_d^2) = \{\underline{d} : \sum_{i=1}^{K} \frac{(\hat{d}_i - d_i)^2}{S_{d,i}^2} n_i \le z(K,\alpha)\} \tag{26}$$

hvor $\hat{\underline{d}} = (\hat{d}_1,\dots,\hat{d}_K)$ og $\underline{S}_d^2 = (S_{d,1}^2,\dots,S_{d,K}^2)$.

TEOREM 11. De simultane konfidensintervaller for generelle lineære funksjoner $\sum_{i=1}^{K} c_i d_i$ *basert på området* A *er av formen*

(a): $$\sum_{i=1}^{K} c_i\hat{d}_i - \sqrt{z(K,\alpha)}\sqrt{\sum_{i=1}^{K}\frac{c_i^2 S_{d,i}^2}{n_i}} \le \sum_{i=1}^{K} c_i d_i \le \sum_{i=1}^{K} c_i\hat{d}_i + \sqrt{z(K,\alpha)}\sqrt{\sum_{i=1}^{K}\frac{c_i^2 S_{d,i}^2}{n_i}}. \quad (2$$

Asymptotisk er sannsynligheten lik $(1-\alpha)$ *for at (a) holder for alle lineære funksjoner* $\sum c_i d_i$*, dvs.*

$$\lim_n P_{\underline{d}}\Big(\sum_{i=1}^{K} c_i\hat{d}_i - \sqrt{z(K,\alpha)}\sqrt{\sum_{i=1}^{K}\frac{c_i^2 S_{d,i}^2}{n_i}} \le \sum_{i=1}^{K} c_i d_i \le \sum_{i=1}^{K} c_i\hat{d}_i + \sqrt{z(K,\alpha)}\sqrt{\sum_{i=1}^{K}\frac{c_i^2 S_{d,i}^2}{n_i}}$$

$$\text{for alle } c_1,\dots,c_K\Big) = 1-\alpha.$$

(for alle $\underline{d} = (d_1,\dots,d_K)$ slik at (5) holder.)

Bevis:

La $$E_{\underline{d}} = \{(\hat{\underline{d}},\underline{S}_d^2) : \sum_{i=1}^{K} \frac{(\hat{d}_i - d_i)^2}{S_{d,i}^2} n_i \le z(K,\alpha)\}$$

og $$F_{\underline{d}} = \{(\hat{\underline{d}},\underline{S}_d^2) : \sum_{i=1}^{K} c_i\hat{d}_i - \sqrt{z(K,\alpha)}\sqrt{\sum_{i=1}^{K}\frac{c_i^2 S_{d,i}^2}{n_i}} \le \sum_{i=1}^{K} c_i d_i \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{K} c_i\hat{d}_i + \sqrt{z(K,\alpha)}\sqrt{\sum_{i=1}^{K}\frac{c_i^2 S_{d,i}^2}{n_i}} \quad \text{for alle } (c_1,\dots,c_K)\}.$$

Beviset går ut på å vise at $E_{\underline{d}} = F_{\underline{d}}$ (for alle n) .

La, for en gitt vektor $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_K \end{pmatrix}$: $a_1^c(\hat{\underline{d}},\underline{S}_d^2) = \min\limits_{\underline{d}\in A(\hat{\underline{d}},\underline{S}_d^2)} (\sum\limits_{i=1}^{K} c_i d_i)$ og $a_2^c(\hat{\underline{d}},\underline{S}_d^2) = \max\limits_{\underline{d}\in A(\hat{\underline{d}},\underline{S}_d^2)} (\sum\limits_{i=1}^{K} c_i d_i)$, da vil $E_{\underline{d}} \subset F_{\underline{d}}^* = \{(\hat{\underline{d}},\underline{S}_d^2) : a_1^c \leq \sum\limits_{i=1}^{K} c_i d_i \leq a_2^c$ for alle vektorer $c\}$.

Anta nemlig $(\hat{\underline{d}},\underline{S}_d^2) \in E_{\underline{d}}$. Da vil for en vilkårlig c:

$$a_1^c(\hat{\underline{d}},\underline{S}_d^2) \leq \sum_{i=1}^{K} c_i d_i \leq a_2^c(\hat{\underline{d}},\underline{S}_d^2) \Longleftrightarrow \text{ For alle c så er:}$$

$$a_1^c(\hat{\underline{d}},\underline{S}_d^2) \leq \sum_{i=1}^{K} c_i d_i \leq a_2^c(\hat{\underline{d}},\underline{S}_d^2) \Longleftrightarrow (\hat{\underline{d}},\underline{S}_d^2) \in F_d^*.$$

(Dette holder fordi: $(\hat{\underline{d}},\underline{S}_d^2) \in E_{\underline{d}} \Longleftrightarrow \underline{d} \in A(\hat{\underline{d}},\underline{S}_d^2)$).

La oss finne a_1^c og a_2^c. Maksimum og minimum av $\sum\limits_{i=1}^{K} c_i d_i$ må inntreffe på randen av $A(\hat{\underline{d}},\underline{S}_d^2)$, dvs. for en $\underline{d}^0$ slik at

$$\sum_{i=1}^{K} \frac{(\hat{d}_i-d_i^0)^2}{S_{d,i}^2} n_i = z(K,\alpha).$$

Anta f.eks. at $a_2^c = \sum\limits_{i=1}^{K} c_i d_i^*$ hvor $\sum\limits_{i=1}^{K} \frac{(\hat{d}_i-d_i^*)^2}{S_{d,i}^2} < z(K,\alpha)$.

Sett $d_i^{**} = d_i^* + \frac{c_i}{T}$ for en konstant T. Det medfører:

$$\sum_{i=1}^{K} c_i d_i^{**} = \sum_{i=1}^{K} c_i d_i^* + \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{K} c_i^2 > \sum_{i=1}^{K} c_i d_i^*.$$

Siden $\underline{d}^*$ er et indre punkt i A, eksisterer $\varepsilon > 0$ slik at:

$$\{|\underline{d}^* - \underline{d}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{K} (d_i^*-d_i)^2}<\varepsilon\} \Rightarrow \{\underline{d} \in A\}$$

og $$|d^* - d^{**}|^2 = \frac{1}{K^2} \sum_{i=1}^{K} c_i^2 < \varepsilon^2 \quad \text{for } T^2 > \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{K} c_i^2.$$

Dvs. at for tilstrekkelig stor nok T så er $\underline{d}^{**} \in A$, og dermed har vi fått en selvmotsigelse.

Helt analogt kan det vises at minimum av $\Sigma c_i d_i$ må inntreffe på randen.

Ekstremumverdiene finnes ved å bruke Lagrange-metoden, under bibetingelsen

$$\sum_{j=1}^{K} \frac{(\hat{d}_i-d_i)^2}{S_{d,i}^2} n_i = z(K,\alpha) \quad . \tag{28}$$

La $g(\underline{d}) = \sum\limits_{i=1}^{K} c_i d_i - \frac{\lambda}{2} (\sum\limits_{i=1}^{K} \frac{(\hat{d}_i-d_i)^2}{S_{d,i}^2} n_i - z(K,\alpha))$

$$\frac{\partial g}{\partial d_k} = 0 : c_k + \lambda \frac{\hat{d}_k - d_k}{S^2_{d,k}} n_k = 0 \qquad \text{for } k=1,\dots,K.$$

$$\Updownarrow$$

$$d_k - \hat{d}_k = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{S^2_{d,k}}{n_k} c_k \Leftrightarrow \frac{(d_k - \hat{d}_k)\sqrt{n_k}}{S_{d,k}} = \frac{1}{\lambda} \frac{S_{d,k}}{\sqrt{n_k}} c_k .$$

Dette gir:

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{(\hat{d}_k - d_k)^2}{S^2_{d,k}} n_k = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{k=1}^{K} \frac{c_k^2 S_{d,k}}{n_k} .$$

Herav:

$$\frac{1}{\lambda^2} \sum_{k=1}^{K} \frac{c_k^2 S^2_{d,k}}{n_k} = z(K,\alpha) \quad \text{og dermed:}$$

$$\frac{1}{\lambda} = \pm \sqrt{\frac{z(K,\alpha)}{\sum_{k=1}^{K} \frac{c_k^2 S^2_{d,k}}{n_k}}} .$$

Det følger nå at:

$$\sum_{i=1}^{K} c_i d_i = \sum_{i=1}^{K} c_i \hat{d}_i + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{K} \frac{S^2_{d,i}}{n_i} c_i^2 = \sum_{i=1}^{K} c_i d_i \pm \sqrt{z(K,\alpha)} \sqrt{\sum_{i=1}^{K} \frac{c_i^2 S^2_{d,i}}{n_i}} .$$

Dvs.

$$a_1^c = \sum_{i=1}^{K} c_i \hat{d}_i - \sqrt{z(K,\alpha)} \sqrt{\sum_{i=1}^{K} \frac{c_i^2 , S^2_{d,i}}{n_i}}$$

$$a_2^c = \sum_{i=1}^{K} c_i \hat{d}_i + \sqrt{z(K,\alpha)} \sqrt{\sum_{i=1}^{K} \frac{c_i^2 S^2_{d,i}}{n_i}} .$$

Dette medfører at

$$F^*_{\underline{d}} = F_{\underline{d}}$$

og dermed $E_{\underline{d}} \subset F_{\underline{d}}$.

Har igjen å vise at $F_{\underline{d}} \subset E_{\underline{d}}$.
Anta $(\hat{\underline{d}}, \underline{S}^2_d) \in F_{\underline{d}}$, dvs. at $a_1^c \leq \sum_{i=1} c_i d_i \leq a_2^c$ for alle c.
Spesielt for følgende c gitt ved:

$$c_i = \frac{\hat{d}_i - d_i}{S^2_{d,i}} n_i \frac{1}{\sqrt{z(K,\alpha)}}$$

har vi:

$$\left| \sum_{i=1}^{K} c_i(\hat{d}_i - d_i) \right| \leq \sqrt{z(K,\alpha)} \sqrt{\sum_{i=1}^{K} \frac{c_i^2 S^2_{d,i}}{n_i}} .$$

Det medfører:

$$\frac{1}{\sqrt{z(K,\alpha)}} \sum_{i=1}^{K} \frac{(\hat{d}_i - d_i)^2}{S^2_{d,i}} n_i \leq \sqrt{z(K,\alpha)} \sqrt{\sum_{i=1}^{K} \frac{(\hat{d}_i - d_i)^2}{S^2_{d,i}} \cdot n_i^2 \frac{1}{z(K,\alpha)} \cdot \frac{S^2_{d,i}}{n_i}}$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{K} \frac{(\hat{d}_i - d_i)^2}{S^2_{d,i}} n_i \leq \sqrt{z(K,\alpha)} \sqrt{\sum_{i=1}^{K} \frac{(\hat{d}_i - d_i)^2}{S^2_{d,i}} n_i}$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{K} \frac{(\hat{d}_i - d_i)^2}{S^2_{d,i}} n_i \leq z(K,\alpha) \Longleftrightarrow (\hat{\underline{d}}, \underline{S}^2_d) \in E_{\underline{d}} .$$

Hermed er det vist at $E_{\underline{d}} = F_{\underline{d}}$ for alle n, slik at

$$\lim_n P(F_{\underline{d}}) = \lim_n P(E_{\underline{d}}) = 1 - \alpha. \qquad \textit{Q.E.D.}$$

For differenser $d_i - d_j$ ser vi at intervallene i teorem 11 er på formen:

$$\hat{d}_i - \hat{d}_j - \sqrt{z(K,\alpha)} \sqrt{\frac{S^2_{d,i}}{n_i} + \frac{S^2_{d,j}}{n_j}} \leq d_i - d_j \leq \hat{d}_i - \hat{d}_j + \sqrt{z(K,\alpha)} \sqrt{\frac{S^2_{d,i}}{n_i} + \frac{S^2_{d,j}}{n_j}} . \quad (29)$$

Testmetoden for lineære funksjoner i d_i-ene består nå i å påstå $\Sigma c_i d_i \neq 0$ hvis intervallet ikke omfatter 0, dvs. hvis

$$\left| \sum_{i=1}^{K} c_i \hat{d}_i \right| > \sqrt{z(K,\alpha)} \sqrt{\sum_{i=1}^{K} \frac{c_i^2 S^2_{d,i}}{n_i}} . \qquad (30)$$

For differenser blir testen: Påstå $d_i \neq d_j$ hvis $|T^0_{ij}| > \sqrt{z(K,\alpha)}$ hvilket gir:

$$\text{Påstå } d_i > d_j \quad \text{hvis } T^0_{ij} > \sqrt{z(K,\alpha)} . \qquad (31)$$

Sammenligning av denne testen og multiple N-tester gjøres senere. Noen egenskaper ved testen (30) er gitt i neste setning.

LEMMA 28.

$$\lim_n P_{\underline{d}}\ (\textit{minst en gal påstand: } \Sigma c_i d_i \neq 0) = \begin{cases} \alpha & \text{for } \textit{hvis } \underline{d} = 0 \\ \leq \alpha & \textit{hvis } \underline{d} \neq 0 \end{cases}$$

Bevis:

Anta først $\underline{d} = 0$. Da er $\sum_{i=1}^{K} c_i d_i = 0$ for alle $c' = (c_1, \ldots, c_K)$, slik at $P(\text{påstå minst en } \Sigma\, c_i d_i \neq 0 \text{ feilaktig}) = P(\text{påstå minst en } \Sigma\, c_i d_i \neq 0)$
$= 1 - P(\text{alle intervallene (27) omfatter } 0)$

$$= 1 - P\Big(\sum_{i=1}^{K} c_i \hat{d}_i - \sqrt{z(K,\alpha)}\sqrt{\sum_{i=1}^{K} \frac{c_i^2 S_{d,i}^2}{n_i}} \leq \sum_i c_i d_i \leq \sum_{i=1}^{K} c_i \hat{d}_i + \sqrt{z(K,\alpha)} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{K} \frac{c_i^2 S_{d,i}^2}{n_i}} \text{ alle } c \;\Big|\; \sum_i c_i d_i = 0\Big) \underset{n\to\infty}{\to} 1-(1-\alpha) = \alpha.$$

La nå $\underline{d} \neq 0$.

$P_{\underline{d}}(\text{minst en gal påstand: } \sum_{i=1} c_i d_i \neq 0) = 1 - P_{\underline{d}}(\text{ingen gale påstander})$
$= 1 - P_{\underline{d}}\ (\text{Intervallene (27) omfatter 0 for de } c, \text{ slik at } \sum_i c_i d_i = 0)$
Begivenheten $\{$ Intervallene (27) omfatter $\Sigma c_i d_i$ for alle c$\}$ => $\{$Intervallene (27) omfatter $\Sigma c_i d_i$ for de c, hvor $\Sigma c_i d_i = 0\}$
Herav ses at

$$\lim_n P_{\underline{d}}\ (\text{Intervallene (27) omfatter 0 for de } c, \text{ hvor } \Sigma c_i d_i = 0) \geq 1-\alpha.$$

og dermed $\lim P_{\underline{d}}(\text{minst en gal påstand: } \Sigma c_i d_i \neq 0) \leq \alpha$.

Q.E.D.

Hvis $\sum_{i=1}^{K} c_i \hat{d}_i > 0$ og (30) holder vil det være naturlig å påstå

$$\sum_i c_i d_i > 0.$$

Da vil følgende resultat holde:

LEMMA 29.

$$\lim_n P(\textit{påstå } \sum_{i=1}^{K} c_i d_i > 0 \;|\; \sum_{i=1}^{K} c_i d_i < 0) = 0$$

Bevis:

$\sum_{i=1}^{K} c_i \hat{d}_i \overset{P}{\to} \sum_{i=1}^{K} c_i d_i$. Det medfører: $\sum_i c_i \hat{d}_i \overset{D}{\to} \sum_i c_i d_i$, slik at

$$\lim_n P(\sum_i c_i \hat{d}_i > x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x < \sum_i c_i d_i \\ 0 & \text{hvis } x > \sum_i c_i d_i \end{cases}$$

Herav $\lim_n P(\text{påstå } \sum_i c_i d_i > 0 \mid \sum_i c_i d_i < 0) = \lim_n P(\sum_i c_i \hat{d}_i > (z(K,\alpha) \sum_i \frac{c_i^2 S_{d,i}^2}{n_i})^{\frac{1}{2}})$

$$\leq \lim_n P(\sum_i c_i \hat{d}_i > 0 \mid \sum_i c_i d_i < 0 \mid = 0.$$

Q.E.D.

Testen (31) for differenser har tilsvarende egenskaper som multiple N-tester:

LEMMA 30. For $(\underline{d},\underline{\sigma}_d) \in \omega(V_1,\ldots,V_t)$ *gjelder:*

a) $\lim_n \alpha(d_1,\ldots,d_K,\underline{\sigma}_d) = \lim_n P(\bigcup_{h=1}^{t} \max_{i,j\in V_h} T_{ij}^o > \sqrt{z(K,\alpha)}) =$

$1 - \prod_{h=1}^{t} \lim_n P(\max_{i,j\in V_h} T_{ij}^o \leq \sqrt{z(K,\alpha)})$.

b) $\lim_n \alpha(d_1,\ldots,d_K,\underline{\sigma}_d) \leq \alpha$.

Bevis:

a) Helt analogt med beviset for teorem 9a) ved å erstatte $x(\frac{\alpha}{K(K-1)})$ med $\sqrt{z(K,\alpha)}$.

b) Fra a). $\lim_n \alpha(d_1,\ldots,d_K,\underline{\sigma}_d) = 1 - \lim_n P$(intervallene (27) omfatter 0 for alle c slik at $c_i=1$ og $c_j=-1$, $c_k=0$ for $k\neq i,j$, og $d_i=d_j$)

$=1-\lim P$(intervallene (27) omfatter d_i-d_j for de i,j s.a. $d_i=d_j$)

$\leq 1-\lim_n P$(intervallene (27) omfatter $\sum c_i d_i$ for alle c) $= 1-(1-\alpha)=\alpha$. *Q.E.D.*

Analogt med teorem 9b) has også

$$\lim_n \alpha(d_1,\ldots,d_K,\underline{\sigma}_d) \leq 2[1 - \Phi(\sqrt{z(K,\alpha)})] \sum_{h=1}^{t} \frac{v_h(v_h-1)}{2} \leq$$

$$\{1 - \Phi(\sqrt{z(K,\alpha)})\} (K+1-t)(K-t).$$

I II.5 sammenlignes $x(\frac{\alpha}{K(K-1)})$og $\sqrt{z(K,\alpha)}$, og det viser seg at for alle vanlige valg av α så er $x(\frac{\alpha}{K(K-1)}) < \sqrt{z(K,\alpha)}$. I såfall er

$$1 - \Phi(\sqrt{z(K,\alpha)}) \leq \frac{\alpha}{K(K-1)}, \text{ og dermed: } \lim_n \alpha(d_1,\ldots,d_K,\underline{\sigma}_d) \leq (1-\frac{t-1}{K})(1-\frac{t-1}{k-1})\alpha$$

II.3 ii) Generelle produkt-potenser: $\prod_{k=1}^{K} d_k^{c_k}$.

Det antas nå at avhengighetsmålet d er positivt, dvs. $d_k > 0$, for $k=1,\ldots,K$. Hvis vi er interessert i å sammenligne graden av avhengighet i tabellene, vil dette alltid være tilfelle. Anta. f.eks. at vi har valgt målet γ (se del 1-

III.3 (ii)), $\gamma \in [-1,1]$. Vi bruker da simpelthen $d=\gamma^2$ til å sammenligne styrken av avhengighet i tabellene.

La oss nå betrakte lineære funksjoner i $\ln d_k$-ene istedenfor d_k. Dersom d_k har kontinuerlige partielle deriverte, vil selvsagt også $\ln d_k$ ha kontinuerlige partielle deriverte, og $\dfrac{\partial \ln d_k}{\partial p_{ijk}} = \dfrac{1}{d_k} d^*_{ij,k}$.

Herav følger at:

$$S^2_{\ln d,k} = \left(\frac{1}{\hat{d}_k}\right)^2 S^2_{d,k} \tag{32}$$

Fra teorem 11 har vi dermed:

$$\lim_n P\left(\sum_{k=1}^K c_k \ln \hat{d}_k - \sqrt{z(K,\alpha)} \sqrt{\sum_{k=1}^K \frac{c_k^2 S^2_{d,k}}{n_k \hat{d}_k^2}} \le \sum_{k=1}^K c_k \ln d_k \le \sum_{k=1}^K c_k \ln \hat{d}_k + \sqrt{z(K,\alpha)} \sqrt{\sum_{k=1}^K \frac{c_k^2 S^2_{d,k}}{n_k \hat{d}_k^2}} \text{ for alle } c\right) = 1 - \alpha.$$

Ulikheten i parentesen kan uttrykkes slik:

$$\ln \prod_{k=1}^K \hat{d}_k^{c_k} - \sqrt{z(K,\alpha)} \sqrt{\sum_{k=1}^K \frac{c_k^2 S^2_{d,k}}{n_k \hat{d}_k^2}} \le \ln \prod_{k=1}^K d_k^{c_k} \le \ln \prod_{k=1}^K \hat{d}_k^{c_k} + \sqrt{z(K,\alpha)} \sqrt{\sum_{k=1}^K \frac{c_k^2 S^2_{d,k}}{n_k \hat{d}_k^2}} \text{ for alle } c \iff$$

$$\prod_{k=1}^K \hat{d}_k^{c_k} \cdot e^{-\left[z(K,\alpha) \sum_{k=1}^K \frac{c_k^2 S^2_{d,k}}{n_k \hat{d}_k^2}\right]^{\frac{1}{2}}} \le \sum_{k=1}^K d_k^{c_k} \le \prod_{k=1}^K \hat{d}_k^{c_k} \cdot e^{\left[z(K,\alpha) \sum_{k=1}^K \frac{c_k^2 S^2_{d,k}}{n_k \hat{d}_k^2}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

for alle c.

Vi har dermed følgende resultat:

TEOREM 12. Simultane konfidensintervaller for generelle produkt-poteser $\prod_{k=1}^K d_k^{c_k}$ *basert på området* $A^{\ln}(\underline{\hat{d}},\underline{S}^2_d) = \{\underline{d} : \sum_{i=1}^K \frac{(\ln \hat{d}_i - \ln d_i)^2}{S^2_{d,i}} n_i \cdot \hat{d}_i^2 \le z(K,\alpha)\}$ *er av formen:*

$$\text{(a)} \quad \prod_{k=1}^K \hat{d}_k^{c_k} \cdot e^{-\left[z(K,\alpha) \sum_{i=1}^K \frac{c_i^2 S^2_{d,i}}{n_i \hat{d}_i^2}\right]^{\frac{1}{2}}} \le \prod_{k=1}^K d_k^{c_k} \le \prod_{k=1}^K \hat{d}_k^{c_k} \cdot e^{\left[z(K,\alpha) \sum_{i=1}^K \frac{c_i^2 S^2_{d,i}}{n_i \hat{d}_i^2}\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{33}$$

Sannsynligheten er asymptotisk lik (1-α) for at (a) holder for alle ($c_1, \ldots, c_K$).

Det kan være av spesiell interesse å betrakte forholdene $\frac{d_i}{d_j}$.
Ved å sette $c_i = 1$, $c_j = -1$ og $c_k = 0$ for $k \neq (i,j)$, ser man at teorem 12 gir oss følgende intervaller for d_i/d_j:

$$\frac{\hat{d}_i}{\hat{d}_j} e^{-\left[z(K,\alpha)\left(\frac{S^2_{d,i}}{n_i \hat{d}_i^2} + \frac{S^2_{d,j}}{n_j \hat{d}_j^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{d_i}{d_j} \leq \frac{\hat{d}_i}{\hat{d}_j} e^{\left[z(K,\alpha)\left(\frac{S^2_{d,i}}{n_i \hat{d}_i^2} + \frac{S^2_{d,j}}{n_j \hat{d}_j^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{34}$$

Fra (33): $\lim_n P((34) \text{ holder for alle } i,j) \geq 1-\alpha$.

Multiple N-tester for differenser $\ln d_i - \ln d_j$ kan også anvendes til å konstruere simultane konfidensintervaller for d_i/d_j.
(10) gir oss følgende intervaller:

$$\frac{\hat{d}_i}{\hat{d}_j} e^{-x\left(\frac{\alpha}{K(K-1)}\right)\sqrt{\frac{S^2_{d,i}}{\hat{d}_i^2 n_i} + \frac{S^2_{d,j}}{\hat{d}_j^2 n_j}}} \leq \frac{d_i}{d_j} \leq \frac{\hat{d}_i}{\hat{d}_j} e^{x\left(\frac{\alpha}{K(K-1)}\right)\sqrt{\frac{S^2_{d,i}}{\hat{d}_i^2 n_i} + \frac{S^2_{d,j}}{\hat{d}_j^2 n_j}}} \tag{35}$$

Sannsynligheten for at (35) holder for alle i og j er asymptotisk $\geq 1-\alpha$.

Som før nevnt blir det senere vist at for alle de vanlige valg av α så er

$x\left(\frac{\alpha}{K(K-1)}\right) < \sqrt{z(K,\alpha)}$, slik at intervallene (35) er kortere enn intervallene (34).

Testmetoden for produkt-potenser:

Påstår $\prod_{k=1}^{K} d_k^{c_k} \neq 1$ hvis konfidensintervallet (33) ikke omfatter 1,
dvs. hvis

$$\prod_{k=1}^{K} \hat{d}_k^{c_k} > e^{\left[z(K,\alpha)\sum_{i=1}^{K}\frac{c_i^2 S^2_{d,i}}{n_i \hat{d}_i^2}\right]^{\frac{1}{2}}} \quad \text{eller} \quad \prod_{k=1}^{K} \hat{d}_k^{c_k} < e^{-\left[z(K,\alpha)\sum_{i=1}^{K}\frac{c_i^2 S^2_{d,i}}{n_i \hat{d}_i^2}\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{36}$$

LEMMA 31.

$\lim_n P$ (*minst en gal påstand:* $\prod_{k=1}^{K} d_k^{c_k} \neq 1) \leq \alpha$.

Bevis:

P(minst en gal påstand) = 1-P(ingen gale påstander)
= 1-P(Intervallene (33) omfatter 1 fordi c slik at $\prod d_k^{c_k} = 1$).

Nå vil begivenheten {Intervallene (33) omfatter $\prod_{k=1}^{K} d_k^{c_k}$ for alle c} selvsagt medføre at {Intervallene (33) omfatter $\Pi d_k^{c_k}$ for de c hvor $\Pi d_k^{c_k} = 1$}. Herav ses da at

$$\lim_n P(\text{intervallene (33) omfatter 1 for de c,s.a. } \Pi d_k^{c_k} = 1) \geq 1-\alpha,$$

og dermed

$$P(\text{minst en gal påstand}) \leq \alpha. \qquad \textit{Q.E.D.}$$

Ved å anvende teorem 11 og 12 kan vi konstruere simultane konfidensintervaller for generelle lineære funksjoner og generelle produktpotenser samtidig. Resultatet følger fra en enkel relasjon for to begivenheter R_1, R_2:

$$P(R_1 \cap R_2) \geq 1 - P(\bar{R}_1) - P(\bar{R}_2) = P(R_1) + P(R_2) - 1$$

LEMMA 32.

$$\lim_n P\left\{\sum_{k=1}^{K} c_k\hat{d}_k - \left[z(K,\tfrac{\alpha}{2}) \sum_{i=1}^{K} \frac{c_i^2 s_{d,i}^2}{n_i}\right]^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{k=1}^{K} c_k d_k \leq \sum_{k=1}^{K} c_k\hat{d}_k + \left[z(K,\tfrac{\alpha}{2}) \sum_{i=1}^{K} \frac{c_i^2 s_{d,i}^2}{n_i}\right]^{\frac{1}{2}} \text{ for alle } c = (c_1,\ldots,c_K)\right.$$

$$\left. \cap \prod_{k=1}^{K} \hat{d}_k^{b_k} e^{-\left[z(K,\frac{\alpha}{2}) \sum_{i=1}^{K} \frac{b_i^2 s_{d,i}^2}{n_i \hat{d}_i^2}\right]^{\frac{1}{2}}} \leq \prod_{k=1}^{K} d_k^{b_k} \leq \prod_{k=1}^{K} \hat{d}_k^{b_k} e^{\left[z(K,\frac{\alpha}{2}) \sum_{i=1}^{K} \frac{b_i^2 s_{d,i}^2}{n_i \hat{d}_i^2}\right]} \text{ for alle } b = (b_1,\ldots,b_K)\right\} \geq 1-\alpha.$$

Som et eksempel på anvendelse av multiple inferensmetoder, la oss betrakte K 2x2-tabeller.

II.4. Sammenligning av K 2x2-tabeller.

La $\Delta_k = \dfrac{p_{11k}\, p_{22k}}{p_{12k}\, p_{21k}}$, for k=1, ..., K. Det antas at $p_{ijk} > 0$ for i=1,2, j=1,2 og k=1, ..., K. Δ_k er kryssprodukt-forholdet i k-te tabell.

La videre $\hat{\Delta}_k = \dfrac{q_{11k}\, q_{22k}}{q_{12k}\, q_{21k}}$, og $S_k^2 = X_{11k}^{-1}+X_{22k}^{-1}+X_{12k}^{-1}+X_{21k}^{-1}$,

for k=1, ..., K.

Fra lemma 21:

$$s_{\Delta,k}^2 = n_k \Delta_k^2 S_k^2, \text{ for } k = 1, \ldots, K. \tag{37}$$

La $\rho_k = \ln \Delta_k$ og $\hat{\rho}_k = \ln \hat{\Delta}_k$. Da er fra (32):

$$S^2_{\rho,k} = n_k S^2_k \tag{38}$$

Fra II.1.(10) har vi følgende simultane konfidensintervaller for $\rho_i - \rho_j$:

$$\hat{\rho}_i - \hat{\rho}_j - x(\tfrac{\alpha}{K(K-1)})\sqrt{S^2_i+S^2_j} \leq \rho_i - \rho_j \leq \hat{\rho}_i + \hat{\rho}_j + x(\tfrac{\alpha}{K(K-1)})\sqrt{S^2_i+S^2_j} \tag{39}$$

Multiple N-tester for $\rho_i - \rho_j$ blir dermed:

$$\text{Påstår } \rho_i \neq \rho_j \text{ hvis } |\hat{\rho}_i - \hat{\rho}_j| > x(\tfrac{\alpha}{K(K-1)})\sqrt{S^2_i+S^2_j} \tag{40}$$

For k=2 faller resultatene (39) og (40) sammen med resultatene i [5], (s. 97, (49) og (52)).

Ved å anvende teorem 11 får man simultane konfidensintervaller for lineære funksjoner i Δ_k-ene på formen:

$$\sum_{k=1}^{K} c_k\hat{\Delta}_k - \sqrt{z(K,\alpha)}\sqrt{\sum_{i=1}^{K} c_i^2\hat{\Delta}_i^2 S_i^2} \leq \sum_{k=1}^{K} c_k\Delta_k \leq \sum_{k=1}^{K} c_k\hat{\Delta}_k + \sqrt{z(K,\alpha)}\sqrt{\sum_{i=1}^{K} c_i^2\hat{\Delta}_i^2 S_i^2} \tag{41}$$

Er man bare interessert i differenser $\Delta_i - \Delta_j$, vil man som før nevnt for vanlige valg av α få kortere intervaller ved å anvende (10), noe som gir:

$$\hat{\Delta}_i - \hat{\Delta}_j - x(\tfrac{\alpha}{K(K-1)})\sqrt{\hat{\Delta}^2_i S^2_i+\hat{\Delta}^2_j S^2_j} \leq \Delta_i - \Delta_j \leq \hat{\Delta}_i - \hat{\Delta}_j + x(\tfrac{\alpha}{K(K-1)})\sqrt{\hat{\Delta}^2_i S^2_i+\hat{\Delta}^2_i S^2_i} \tag{42}$$

Simultane konfidensintervaller for produkt-potenser blir på formen:

$$\prod_{k=1}^{K} \hat{\Delta}_k^{c_k} e^{-\left[z(K,\alpha)\sum_{i=1}^{K} c_i^2 S_i^2\right]^{\frac{1}{2}}} \leq \prod_{k=1}^{K} \Delta_k^{c_k} \leq \prod_{k=1}^{K} \hat{\Delta}_k^{c_k} e^{\left[z(K,\alpha)\sum_{i=1}^{K} c_i^2 S_i^2\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{43}$$

Simultane intervaller for forholdene Δ_i/Δ_j blir som regel kortere ved å anvende (35) som gir:

$$\frac{\hat{\Delta}_i}{\hat{\Delta}_j} e^{-x(\frac{\alpha}{K(K-1)})\sqrt{S^2_i+S^2_j}} \leq \frac{\Delta_i}{\Delta_j} \leq \frac{\hat{\Delta}_i}{\hat{\Delta}_j} e^{x(\frac{\alpha}{K(K-1)})\sqrt{S^2_i+S^2_j}} \tag{44}$$

II.5. En vurdering av de foreslåtte testmetoder for differenser.

Det er foreslått tre tester for differenser $d_i - d_j$:

A: Multiple N-tester.

Påstår $d_i > d_j$ hvis $T^o_{ij} > x(\frac{\alpha}{K(K-1)})$.

B: MSD-testen.

Påstår $d_i > d_j$ hvis $U > z(K,\alpha)$ og $T^o_{ij} > x(\frac{\alpha}{2})$.

C: Avledet av simultane konfidensintervaller for lineære funksjoner $\sum_{i=1}^{K} c_i d_i$.

Påstår $d_i > d_j$ hvis $T^o_{ij} > \sqrt{z(K,\alpha)}$.

Sannsynligheten for minst en feilaktig påstand ($d_i > d_j$) er $\leq \alpha$ (asymptotisk) for testene A og C. For test B vil dette bare gjelde generelt når $d_1 = \ldots = d_K$. Fra (25) sees at for t=2 f.eks., vil den øvre grensen for den asymptotiske sannsynligheten for minst en feilaktig påstand ved test B være $\frac{(K-1)(K-2)}{2}\alpha$ som er mye større enn α hvis $K \geq 4$. Dessuten vil for $t \geq 2$ $\lim_n \alpha(\underline{d}, \underline{\sigma}_d)$ være minst lik α. Testene A og C bør derfor foretrekkes framfor test B. Ved sammenligning av testene A og C foretrekkes den som gir størst sannsynlighet for å "påstå $d_i > d_j$" når $d_i > d_j$. Dette gir: A er bedre enn C når

$$x^2(\frac{\alpha}{K(K-1)}) < z(K,\alpha), \tag{45}$$

hvilket vil si det samme som at konfidensintervallene (10) er kortere enn intervallene (29).

La nå Y være en stokastisk variabel, $Y \sim N(0,1)$.

Da er: $1 - \alpha = P(-x(\frac{\alpha}{2}) \leq Y \leq x(\frac{\alpha}{2})) = P(Y^2 \leq x^2(\frac{\alpha}{2})) = P(Y^2 \leq z(1,\alpha))$

siden $Y^2 \sim \chi^2_1$. Herav:

$$x^2(\tfrac{\alpha}{2}) = z(1,\alpha).$$

Dette gir:

$$x^2(\frac{\alpha}{K(K-1)}) = z(1, \frac{2\alpha}{K(K-1)}). \tag{46}$$

For K=2 er $x^2(\frac{\alpha}{K(K-1)}) = z(1,\alpha) < z(2,\alpha)$.

(Generelt: $p < s \Rightarrow z(p,\alpha) < z(s,\alpha)$.)

Dvs. at for K=2 er multiple N-tester den beste for å sammenligne $d_i - d_j$.

For K $\geq$ 3 er ikke situasjonen så enkel, men for alle vanlige valg av α ($\leq$0,25) ser det ut som om $z(1,\frac{2\alpha}{K(K-1)}) < z(K,\alpha)$. Hvis, imidlertid, α er større enn f.eks. 0,75 vil ofte den omvendte ulikhet holde. En tabell over disse to fraktilene for spesielle verdier av α og K vil illustrere dette.

Tabell 1a.

α	0,01	0,05	0,10	0,25	0,50	0,75	0,90	0,95	0,99
<u>K=3</u>									
$z(3,\alpha)$	11,35	7,81	6,25	4,11	2,37	1,21	0,58	0,35	0,12
$x^2(\frac{\alpha}{6})=z(1,\frac{\alpha}{3})$	8,61	5,73	4,53	3,00	1,91	1,32	1,08	1,00	0,95
<u>K=4</u>									
$z(4,\alpha)$	13,28	9,49	7,78	5,39	3,36	1,92	1,06	0,71	0,30
$x^2(\frac{\alpha}{12})=z(1,\frac{\alpha}{6})$	9,92	6,96	5,73	4,15	3,00	2,35	2,07	1,99	1,93

Tabell 1b.

<u>α = 0.05</u>	K	2	3	4	5	10
	$z(K,0.05)$	5,99	7,81	9,49	11,07	18,31
	$x^2(\frac{0.05}{K(K-1)})=z(1,\frac{0.1}{K(K-1)})$	3,84	5,73	6,96	7,88	10,63
<u>α = 0.1</u>	K	2	5	10	20	50
	$z(K,0.1)$	4,61	9,24	15,99	28,41	63,17
	$x^2(\frac{0.1}{K(K-1)})=z(1,\frac{0.2}{K(K-1)})$	2,71	6,64	9,38	12,04	15,60

Det synes da klart at testen C er dårligere enn multiple N-tester i de fleste tilfelle for multippel sammenligning av differenser i d_i-ene, men dette er det vi må vente oss, siden testen C er et spesialtilfelle av en multippel test for sammenligning av <u>alle</u> lineære funksjoner i d_i-ene. Den vil da rimeligvis bli en dårligere test for differenser, enn en test som er konstruert spesielt for å undersøke differenser.

Tilslutt gis en oversikt over asymptotiske nivåer, og forkastnings-konstanter $x(\frac{\alpha}{K(K-1)})$ ved multiple N-tester for hver hypotese: H_{ij}: $d_i = d_j$. Nivået ved hver enkelt sammenligning er gitt ved:

$$\alpha_K = \lim_n P(\text{påstå } d_i \neq d_j / d_i = d_j) = \frac{2\alpha}{K(K-1)} . \qquad (47)$$

Tabell 2.

K	2	3	4	5	6	8	10	20	30	40	50
$\alpha=0.01$											
α_K	.01	.0033	.00167	.00100	.00067	.00036	.00022	.000053	.000023	.000013	.000008
$x(\frac{\alpha_K}{2})$	2,58	2,94	3,15	3,29	3,40	3,57	3,7	4,0	4,3	4,4	4,4
$\alpha=0.05$											
α_K	.05	.01667	.00833	.00500	.00333	.00179	.00111	.000263	.000115	.000064	.000041
$x(\frac{\alpha_K}{2})$	1,96	2,39	2,64	2,81	2,93	3,13	3,26	3,66	3,9	4,0	4,1
$\alpha=0.10$											
α_K	.10	.0333	.0167	.0100	.00667	.00358	.00222	.000526	.000230	.000128	.000082
$x(\frac{\alpha_K}{2})$	1,64	2,13	2,39	2,58	2,71	2,91	3,06	3,47	3,7	3,8	3,9

II.6. Et eksempel med K=3.

La oss betrakte de tre tabellene fra eksemplene i del 1-III.10.
I første tabell (k=1) er faktorene yrke og valgdeltaking.
I den andre tabellen (k=2) er faktorene inntekt og valgdeltaking.
I den tredje tabellen (k=3) er faktorene utdanning og partisympati.
Vi skal sammenligne styrken av avhengighet i disse tre tabellene ved å bruke γ som avhengighetsmål (se del 1-III.3ii). Som mål for grad av avhengighet velger vi altså $d=\gamma^2$. γ_k^2 er målet γ^2 i k-te tabell, for k=1,2,3.

$n_1 = n_2 = 2702$, $n_3 = 2413$.
$v_1 = 8$, $w_1 = 2 - v_2 = 6$, $w_2 = 2 - v_3 = 4$, $w_3 = 6$.

Vi fant i del 1-III.10 følgende resultater:

$$\hat{\gamma}_1^2 = 0{,}0002 \qquad 4\hat{\gamma}_1^2 \cdot S_{\gamma,1}^2 = 0{,}004462$$

$$\hat{\gamma}_2^2 = 0{,}0949 \qquad 4\hat{\gamma}_2^2 \cdot S_{\gamma,2}^2 = 2{,}022888$$

$$\hat{\gamma}_3^2 = 0{,}1384 \qquad 4\hat{\gamma}_3^2 \cdot S_{\gamma,3}^2 = 0{,}697536.$$

La oss rangere γ_1^2, γ_2^2, γ_3^2 så langt det lar seg gjøre ved multiple N-tester. Sett $\alpha = 0{,}05$, slik at

$$x\left(\frac{\alpha}{K(K-1)}\right) = 2{,}39.$$

Testen går ut på å påstå: $\gamma_i^2 > \gamma_j^2$ hvis

$$T_{ij}^o = \frac{\hat{\gamma}_i^2 - \hat{\gamma}_j^2}{\sqrt{\dfrac{4\hat{\gamma}_i^2 \cdot S_{\gamma,i}^2}{n_i} + \dfrac{4\hat{\gamma}_j^2 \cdot S_{\gamma,j}^2}{n_j}}} > 2{,}39.$$

Resultater:

$$T_{21}^o = 3{,}46$$

$$T_{31}^o = 8{,}11$$

$$T_{32}^o = 1{,}35$$

Konklusjon: Avhengigheten, målt ved ordinalmålet er sterkere i tabell 2 og 3, enn i tabell 1.

Hvis man i tillegg er interessert i å undersøke f.eks. størrelser av typen: $\frac{\gamma_i^2 + \gamma_j^2}{2} - \gamma_k^2$, $i \neq j \neq k$, kan man istedenfor multiple N-tester bruke testen i II.3 i) ved de simultane intervallene (27). Denne metoden gir bl.a. følgende intervaller:

$$0{,}0181 \leq \gamma_2^2 - \gamma_1^2 \leq 0{,}1713$$

$$-0{,}0465 \leq \gamma_3^2 - \gamma_2^2 \leq 0{,}1335$$

$$0{,}0905 \leq \gamma_3^2 - \gamma_1^2 \leq 0{,}1859$$

$$0{,}0298 \leq \gamma_3^2 - \frac{\gamma_1^2+\gamma_2^2}{2} \leq 0{,}1518$$

$$-0{,}1057 \leq \frac{\gamma_1^2+\gamma_3^2}{2} - \gamma_2^2 \leq 0{,}0545.$$

Simultan konfidensgrad for disse intervallene er tilnærmet lik 0,95.

APPENDIKS.

Det vil her bli gitt beviser for de grunnleggende teoremer fra I.2. Forutsetninger og definisjoner er gitt i I.1.

TEOREM 6.

For $i \neq j$, $i=1,\dots,K$ og $j=1,\dots,K$ gjelder:

$$T_{ij} = \frac{\hat{d}_i - \hat{d}_j - (d_i - d_j)}{\left(\frac{S^2_{d,i}}{n_i} + \frac{S^2_{d,j}}{n_j}\right)^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

Bevis:

Fra teorem 1 har vi at $Z_{i,n} = \dfrac{\hat{d}_i - d_i}{\left(\frac{S^2_{d,i}}{n_i}\right)^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{D} X_i \sim N(0,1)$

og $\quad Z_{j,n} = \dfrac{\hat{d}_j - d_j}{\left(\frac{S^2_{d,j}}{n_j}\right)^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{D} X_j \sim N(0,1).$

For alle n er $Z_{i,n}$ og $Z_{j,n}$ stokastisk uavhengige, og $S^2_{d,i}$, $S^2_{d,j}$ stokastisk uavhengige.

La $\quad T_{ij,n} = \dfrac{\hat{d}_i - \hat{d}_j - (d_i - d_j)}{\left(\frac{S^2_{d,i}}{n_i} + \frac{S^2_{d,j}}{n_j}\right)^{\frac{1}{2}}}$. $\quad T_{ij,n}$ kan uttrykkes på følgende form:

$$T_{ij,n} = Z_{i,n}\left(\frac{S^2_{d,i}/n_i}{S^2_{d,i}/n_i + S^2_{d,j}/n_j}\right)^{\frac{1}{2}} - Z_{j,n}\left(\frac{S^2_{d,j}/n_j}{S^2_{d,i}/n_i + S^2_{d,j}/n_j}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= Z_{i,n}\left(\frac{S^2_{d,i}\cdot\pi_j}{S^2_{d,i}\cdot\pi_j + S^2_{d,j}\cdot\pi_i}\right)^{\frac{1}{2}} - Z_{j,n}\left(\frac{S^2_{d,j}\cdot\pi_i}{S^2_{d,i}\cdot\pi_j + S^2_{d,j}\cdot\pi_i}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{(S^2_{d,i}\cdot\pi_j + S^2_{d,j}\cdot\pi_i)^{\frac{1}{2}}}\left\{Z_{i,n}\sqrt{\pi_j\cdot S^2_{d,i}} - Z_{j,n}\sqrt{\pi_i\cdot S^2_{d,j}}\right\}.$$

La $Y_{i,n} = Z_{i,n}\sqrt{\pi_j\cdot S^2_{d,i}}$ og $Y_{j,n} = Z_{j,n}\sqrt{\pi_i\cdot S^2_{d,j}}$, $Y_{i,n}$ og $Y_{j,n}$ er stokastisk uavhengige for alle n, og $S^2_{d,j} \xrightarrow{P} \sigma^2_{d,j}$, $S^2_{d,i} \xrightarrow{P} \sigma^2_{d,i}$.

Herav følger at:

$$Y_{i,n} \xrightarrow{D} Y_i \sim N(0,\sqrt{\pi_j}\,\sigma_{d,i})$$

$$Y_{j,n} \xrightarrow{D} Y_j \sim N(0,\sqrt{\pi_i}\,\sigma_{d,j}).$$

La nå $g_n(t) = Ee^{itZ_{ij,n}}$ være den karakteristiske funksjonen til $Z_{ij,n}=Y_{i,n}-Y_{j,n}$, $f_{k,n}(t)$ er den karakteristiske funksjonen til $Y_{k,n}$, og $f_k(t)$ er den karakteristiske funksjonen til Y_k. D vil $f_{k,n}(t) \underset{n\to\infty}{\to} f_k(t)$ og dermed:

$$g_n(t) = f_{i,n}(t)\cdot f_{j,n}(-t) \to f_i(t)\cdot f_j(-t)$$

$f_i(t)\cdot f_j(-t)$ er den kar. fu. til $N(0,\sqrt{\pi_j\sigma_{d,i}^2+\pi_i\sigma_{d,j}^2})$.

Herav følger at:

$$Z_{ij,n} \xrightarrow{D} Y \sim N(0,\sqrt{\pi_j\sigma_{d,i}^2+\pi_i\sigma_{d,j}^2})$$

og dermed:

$$T_{ij,n} = \frac{Z_{ij,n}}{\sqrt{\pi_j\, S_{d,i}^2+\pi_i\, S_{d,j}^2}} \xrightarrow{D} \frac{Y}{\sqrt{\pi_j\sigma_{d,i}^2+\pi_i\sigma_{d,j}^2}} \sim N(0,1).$$

Q.E.D.

For å bevise teorem 7 og 8 trenger vi følgende resultat:

Setn. I. La $X_n^1,\dots,X_n^K$ være uavhengige tilfeldige variable for alle n, og anta $X_n^k \xrightarrow{D} X^k$ for k=1,...,K. La g være en kontinuerlig funksjon i K variable. Da vil

$$g(X_n^1,\dots,X_n^K) \xrightarrow{D} g(X^1,\dots,X^K), \text{ hvor}$$

$X^1,\dots,X^K$ alltid kan antas uavhengige.

Bevis:

Siden $X_n^1,\dots,X_n^K$ er uavhengige vil

$$X_n = (X_n^1,\dots,X_n^K) \xrightarrow{D} X = (X^1,\dots,X^K) \text{ hvor } X^1,\dots,X^K \text{ er uavhengige.}$$

Fra [17] (s. 104) sees dermed at

$$g(X_n) \xrightarrow{D} g(X).$$

Q.E.D.

TEOREM 7.

$$U = n \sum_{k=1}^{K} \frac{\pi_k(\hat{d}_k-\hat{d})^2}{S^2_{d,k}} \xrightarrow{D} \chi^2_{K-1}, \text{ } \textit{når } d_1 = \ldots = d_K.$$

Her er:

$$\hat{d} = \sum_{i=1}^{K} \frac{n_i\hat{d}_i}{S^2_{d,i}} \Bigg/ \sum_{i=1}^{K} \frac{n_i}{S^2_{d,i}} = \sum_{i=1}^{K} \frac{\pi_i\hat{d}_i}{S^2_{d,i}} \Bigg/ \sum_{i=1}^{K} \frac{\pi_i}{S^2_{d,i}} .$$

Bevis:

Beviset er helt analogt med beviset for setn. 6a.2 (v) i [17], den eneste forskjellen er at i vårt tilfelle er ikke $S^2_{d,k}$ en kontinuerlig fu. av d_k, men det eneste vi trenger er at $S^2_{d,k}$ er en konsistent estimator for $\sigma^2_{d,k}$, som vi vet holder. Beviset som blir gitt vil være noe mer utfyllende enn i [17].

$\hat{d}_1,\ldots,\hat{d}_K$ er uavhengige, konsistente estimatorer for $d_1,\ldots,d_K$. Fra teorem 1: $\sqrt{n\pi_k}(\hat{d}_k-d_k) \xrightarrow{D} N(0,\sigma_{d,k})$. Dessuten vil, som nevnt ovenfor: $S^2_{d,k} \xrightarrow{P} \sigma^2_{d,k}$ for $k=1,\ldots,K$.

Anta nå at $d_1=d_2=\ldots=d_K=d$.

La oss spalte opp U:

$$U = n \sum_{k=1}^{K} \frac{\pi_k(\hat{d}_k-d+d-\hat{d})^2}{S^2_{d,k}} = n \sum_{k=1}^{K} \frac{\pi_k(\hat{d}_k-d)^2}{S^2_{d,k}} + n(\hat{d}-d)^2 \sum_{k=1}^{K} \frac{\pi_k}{S^2_{d,k}} +$$

$$2n(d-\hat{d}) \sum_{k=1}^{K} \frac{\pi_k\hat{d}_k}{S^2_{d,k}} - 2nd(d-\hat{d}) \sum_{k=1}^{K} \frac{\pi_k}{S^2_{d,k}}$$

$$= n \sum_{k=1}^{K} \frac{\pi_k(\hat{d}_k-d)^2}{S^2_{d,k}} - n(\hat{d}-d)^2 \sum_{k=1}^{K} \frac{\pi_k}{S^2_{d,k}}.$$

La nå $d^* = \dfrac{\sum_{k=1}^{K} \frac{\pi_k\hat{d}_k}{\sigma^2_{d,k}}}{\sum_{k=1}^{K} \frac{\pi_k}{\sigma^2_{d,k}}}$.

Følgende to resultater skal vises:

1) $$n \sum_{k=1}^{K} \frac{\pi_k(\hat{d}_k-d)^2}{S^2_{d,k}} - n \sum_{k=1}^{K} \frac{\pi_k(\hat{d}_k-d)^2}{\sigma^2_{d,k}} \xrightarrow{P} 0$$

2) $$n(\hat{d}-d)^2 \sum_{k=1}^{K} \frac{\pi_k}{S^2_{d,k}} - n(d^*-d)^2 \sum_{k=1}^{K} \frac{\pi_k}{\sigma^2_{d,k}} \xrightarrow{P} 0$$

Bevis for 1):

$$n \sum_k \frac{\pi_k(\hat{d}_k-d)^2}{S^2_{d,k}} - n \sum_k \frac{\pi_k(\hat{d}_k-d)^2}{\sigma^2_{d,k}}$$

$$= \sum_k \frac{n\pi_k(\hat{d}_k-d)^2}{\sigma^2_{d,k}} \left[\frac{\sigma^2_{d,k}}{S^2_{d,k}} - 1\right] \xrightarrow{P} 0$$

siden $\frac{\sigma^2_{d,k}}{S^2_{d,k}} - 1 \xrightarrow{P} 0$ og $\frac{n\pi_k(\hat{d}_k-d)^2}{\sigma^2_{d,k}} \xrightarrow{D} \chi^2_1$ for $k=1,\ldots,K$.

Bevis for 2):

$$n(\hat{d}-d)^2 \sum_k \frac{\pi_k}{S^2_{d,k}} - n(d^*-d)^2 \sum_k \frac{\pi_k}{\sigma^2_{d,k}}$$

$$= n(\hat{d}-d)^2\left(\sum_k\left(\frac{\pi_k}{S^2_{d,k}} - \frac{\pi_k}{\sigma^2_{d,k}}\right)\right) + \left(\sum_k \frac{\pi_k}{\sigma^2_{d,k}}\right)\left(n(\hat{d}-d)^2 - n(d^*-d)^2\right).$$

Vi ser at $\sum_k\left(\frac{\pi_k}{S^2_{d,k}} - \frac{\pi_k}{\sigma^2_{d,k}}\right) \xrightarrow{P} 0$,

og $n(\hat{d}-d)^2 \xrightarrow{D} Z^2 = \left(\frac{\sum_k \sqrt{\pi_k}\,\frac{Z_k}{\sigma^2_{d,k}}}{\sum_k \frac{\pi_k}{\sigma^2_{d,k}}}\right)^2$ hvor $Z_1,\ldots,Z_K$ er uavhengige

og $Z_k \sim N(0,\sigma_{d,k})$.

Dermed has at $n(\hat{d}-d)^2 \sum_k\left(\frac{\pi_k}{S^2_{d,k}} - \frac{\pi_k}{\sigma^2_{d,k}}\right) \xrightarrow{P} 0$.

Videere: $n(\hat{d}-d)^2 - n(d^*-d)^2 = \sqrt{n}(\hat{d}-d^*)\,\sqrt{n}(\hat{d}-d) + \sqrt{n}(\hat{d}-d^*)\,\sqrt{n}(d^*-d)$.

$\sqrt{n}(\hat{d}-d) \xrightarrow{D} Z$ og $\sqrt{n}(d^*-d) \xrightarrow{D} Z$.

Ved å skrive ut $\sqrt{n}(\hat{d}-d^*)$ får man: $\sqrt{n}(\hat{d}-d^*) =$

$$\frac{\sum\limits_k \sum\limits_i \sqrt{n\pi_k}\,(\hat{d}_k-d)\left[\dfrac{\sqrt{\pi_k}\;\pi_i}{S^2_{d,k}\,\sigma^2_{d,i}} - \dfrac{\sqrt{\pi_k}\;\pi_i}{\sigma^2_{d,k}\,S^2_{d,i}}\right]}{\left(\sum\limits_k \dfrac{\pi_k}{S^2_{d,k}}\right)\left(\sum\limits_k \dfrac{\pi_k}{\sigma^2_{d,k}}\right)} \xrightarrow{P} 0,$$

fordi $\sqrt{n\pi_k}\,(\hat{d}_k-d) \xrightarrow{D} N(0,\sigma_{d,k})$ og $\dfrac{\sqrt{\pi_k}\;\pi_i}{S^2_{d,k}\sigma^2_{d,i}} - \dfrac{\sqrt{\pi_k}\;\pi_i}{\sigma^2_{d,k}S^2_{d,i}} \xrightarrow{P} 0$ for

$i=1,\ldots,K$ og $k=1,\ldots,K$.

Dette medfører at:

$$n(\hat{d}-d)^2 - n(d^*-d)^2 \xrightarrow{P} 0, \quad \text{og dermed:}$$

$$n(\hat{d}-d)^2 \sum_k \frac{\pi_k}{S^2_{d,k}} - n(d^*-d)^2 \sum_k \frac{\pi_k}{\sigma^2_{d,k}} \xrightarrow{P} 0.$$

1) og 2) medfører at:

$$U - U' \xrightarrow{P} 0$$

hvor $$U' = n \sum_k \frac{\pi_k(\hat{d}_k-d)^2}{\sigma^2_{d,k}} - n(d^*-d)^2 \sum_k \frac{\pi_k}{\sigma^2_{d,k}}.$$

La $b_k = \sigma_{d,k}/\sqrt{\pi_k}$. Da vil $Y_k = \dfrac{\sqrt{n}(\hat{d}_k-d)}{b_k} \xrightarrow{D} N(0,1)$.

$Y_1,\ldots,Y_K$ er stokastisk uavhengige,

og $\sqrt{n}(d^*-d) = \dfrac{\left(\sum\limits_k Y_k/b_k\right)}{\left(\sum\limits_k 1/b_k^2\right)}$ slik at

$$U' = \sum_{k=1}^{K} Y_k^2 - \frac{\left(\sum\limits_k Y_k/b_k\right)^2}{\left(\sum 1/b_k^2\right)}.$$

Siden $Y_1,\ldots,Y_K$ er uavhengige, vil

$Y = (Y_1,\ldots,Y_K) \xrightarrow{D} X = (X_1,\ldots,X_K)$ hvor X_k-ene er stokastisk uavhengige og $N(0,1)$.

U' er en kontinuerlig funksjon i $Y_1,\ldots,Y_K$. Fra setn. I har vi dermed:

$$U' \xrightarrow{D} W = \sum_{k=1}^{K} X_k^2 - \frac{\left(\sum\limits_k X_k/b_k\right)^2}{\left(\sum\limits_k 1/b_k^2\right)}.$$

La oss innføre en ortogonaltransformasjon for å finne fordelingen til W:

$$V_1 = \frac{b_1^{-1}}{\sqrt{\sum_k b_k^{-2}}} X_1 + \frac{b_2^{-1}}{\sqrt{\sum_k b_k^{-2}}} X_2 + \ldots + \frac{b_K^{-1}}{\sqrt{\sum_k b_k^{-2}}} X_K$$

$$V_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2K}X_K$$

$$V_K = a_{K1}X_1 + a_{K2}X_2 + \ldots + a_{KK}X_K.$$

$V_1,\ldots,V_k$ er stokastisk uavhengige og N (0,1), og vi ser at $W = \sum_{k=2}^{K} V_k^2 \sim \chi^2_{K-1}$.

Dvs. at $U' \xrightarrow{D} W \sim \chi^2_{K-1}$, og $U - U' \xrightarrow{P} 0$

$\Rightarrow U \xrightarrow{D} W \sim \chi^2_{K-1}$. *Q.E.D.*

TEOREM 8.

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{n_k(\hat{d}_k - d_k)^2}{S^2_{d,k}} \xrightarrow{D} \chi^2_K .$$

Bevis:

La X_n^k i setn. I være definert ved:

$$X_n^k = \frac{(\hat{d}_k - d_k)^2 n_k}{S^2_{d,k}}, \text{ for } k=1,\ldots,K.$$

$X_n^1,\ldots,X_n^K$ er stokastisk uavhengige, og fra teorem 1 gjelder:

$(X_n^1,\ldots,X_n^K) \xrightarrow{D} (X^1,\ldots,X^K)$, hvor $X^1,\ldots,X^K$ er stokastisk uavhengige og $X^k \sim \chi^2_1$ for k=1,...,K.

Setn. I gir da at $\sum_{k=1}^{K} X_n^k \xrightarrow{D} \sum_{k=1}^{K} X^k \sim \chi^2_K$.

Q.E.D.

La oss nå vende tilbake til teorem 9. Vi skal vise at

$$\sum_{h=1}^{t} v_h^2 \leq (K-t+1)^2 + t - 1 = M. \qquad (*)$$

Generelt vil t-r av v_h-ene være lik 1. For r=1 has likhet i (*).
Vi vil derfor anta $2 \leq r \leq t$. De resterende verdier betegnes med

$$p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_{r-1} \leq p_r \;;\; p_i \geq 2 \text{ for } i=1,\ldots,r \text{ og } p_r = K - \sum_{i=1}^{r-1} p_i - t + r.$$

Siden $p_r \geq p_{r-1}$ vil $K \geq \sum_{i=1}^{r-1} p_i + p_{r-1} + t - r$. Det generelle uttrykket for $\sum_{h=1}^{t} v_h^2$ blir nå:

$$\sum_{h=1}^{t} v_h^2 = t-r+\sum_{i=1}^{r-1} p_i^2 + (K-\sum_{i=1}^{r-1} p_i - t+r)^2 .$$

Herav:

$$M-\sum_{h=1}^{t} v_h^2 = 2K\left[\sum_{i=1}^{r-1} p_i - r+1\right] -2t+r-\sum_{i=1}^{r-1} p_i^2 - (\sum_{i=1}^{r-1} p_i)^2 - 2t\sum_{i=1}^{r-1} p_i + 2r\sum_{i=1}^{r-1} p_i + 2t\cdot r - r^2$$

$$\geq 2(\sum_{i=1}^{r-1} p_i + p_{r-1} + t - r)(\sum_{i=1}^{r-1} p_i - r+1) - 2t+r-\sum_{i=1}^{r-1} p_i^2 - (\sum_{i=1}^{r-1} p_i)^2 - 2t\sum_{i=1}^{r-1} p_i +$$

$$2r\sum_{i=1}^{r-1} p_i + 2t\cdot r - r^2$$

$$= (\sum_{i=1}^{r-1} p_i)^2 - \sum_{i=1}^{r-1} p_i^2 + 2\sum_{i=1}^{r-1} p_i + 2p_{r-1}\sum_{i=1}^{r-1} p_i + r^2 - r + 2p_{r-1} - 2rp_{r-1} - 2r\sum_{i=1}^{r-1} p_i$$

$$= 2\sum_{i=1}^{r-2}\sum_{j=i+1}^{r-1} p_i p_j + r(r-1) - 2r\sum_{i=1}^{r-1} p_i + 2p_{r-1} + 2(p_{r-1}+1)\sum_{i=1}^{r-1} p_i - 2rp_{r-1} = A.$$

For $r=2$ fås: $A = 2(p_1-1)^2 \geq 2 > 0$.

Anta nå $r \geq 3$.

$$A = 2p_{r-1}\sum_{i=1}^{r-2} p_i + 2\sum_{i=1}^{r-3}\sum_{j=i+1}^{r-2} p_i p_j + r(r-1) - 2r\sum_{i=1}^{r-2} p_i - 4rp_{r-1} + 4p_{r-1} + 2p_{r-1}^2 +$$

$$2p_{r-1}\sum_{i=1}^{r-2} p_i + 2\sum_{i=1}^{r-2} p_i$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{r-2} p_i - (r-1)\right)^2 - \sum_{i=1}^{r-2} p_i^2 + r-1-4rp_{r-1} + 4p_{r-1}\sum_{i=1}^{r-2} p_i + 2p_{r-1}^2$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{r-2} p_i - (r-1)\right)^2 + \sum_{i=1}^{r-2} p_i(p_{r-1}-p_i) + r-1-4rp_{r-1} + 4p_{r-1} + 3p_{r-1}\sum_{i=1}^{r-2} p_i + 2p_{r-1}^2$$

$$\geq \left(\sum_{i=1}^{r-2} p_i - r+1\right)^2 + \sum_{i=1}^{r-2} p_i(p_{r-1}-p_i) + r-1+2rp_{r-1} - 8p_{r-1} + 2p_{r-1}^2$$

(anvender: $\sum_{i=1}^{r-2} p_i \geq 2(r-2)$)

$$= \left(\sum_{i=1}^{r-2} p_i - r+1\right)^2 + \sum_{i=1}^{r-2} p_i(p_{r-1}-p_i) + r-1+2rp_{r-1} - 8 + 2(p_{r-1}-2)^2 > r-1$$

Vi har dermed vist at

$$A > r-1 \quad \text{for } r \geq 2, \text{ hvilket gir } \; A \geq r-1 \text{ for } 1 \leq r \leq t.$$

Herav: $M \geq \sum_{h=1}^{t} v_h^2 + r - 1 \geq \sum_{h=1}^{t} v_h^2.$ *Q.E.D. for (*).*

REFERANSER.

[1] Berkson, J. (1938): "Some difficulties of interpretation encountered in the application of the chi-square test", J.Am.Statist.Ass., Vol 33, 526-536.

[2] Edwards, A.W.F.(1963): "The measure of association in a 2x2-table", J.R. Statist.Soc., A 126, 109-114.

[3] Fisher, R.A. (1962): "Confidence limits for a cross-product ratio", Austral. J. Statist., Vol 4, 41.

[4] Goodman, L.A. (1963): "On methods of comparing contingency tables", J.R. Statist. Soc., A 126, 94-108.

[5] Goodman, L.A. (1964): "Simultaneous confidence limits for cross-product ratios in contingency tables", J.R. Statist. Soc., B 26, 86-102.

[6] Goodman, L.A. & Kruskal, W.H. (1954): "Measures of association for cross classifications", J. Am. Statist. Ass., Vol. 49, 732-764.

[7] Goodman, L.A. & Kruskal, W.H. (1959): "Measures of association for cross classifications II. Further discussions and references", J. Am. Statist. Ass., Vol 54, 123-163.

[8] Goodman, L.A. & Kruskal, W.H. (1963): "Measures of association for cross classifications III. Approximate sampling theory", J. Am. Statist. Ass., Vol 58, 310-364.

[9] Hodges, J.L. jr. & Lehmann, E.L. (1954): "Testing the approximate validity of statistical hypotheses", J.R. Statist. Soc., B 16, 261-268.

[10] Kendall, M.G. (1955): "Rank Correlation Methods", Charles Griffin & Co., Lim.

[11] Kruskal, W.H. (1958): "Ordinal measures of association", J. Am. Statist. Ass., Vol 53, 814-861.

[12] Lehmann, E.L. (1959): "Testing Statistical Hypotheses", John Wiley & Sons, Inc.

[13] Miller, R.G. (1966): "Simultaneus statistical inference", McGraw-Hill Book Company.

[14] Mosteller, F. (1968): "Association and estimation in contingency tables", J. Am. Statist. Ass., Vol 63, 1-28.

[15] Neyman, J. (1949): "Contribution to the theory of the χ^2-test", Proc. Berkeley Symp. Math. Statist., 239-273.

[16] NOS A 340: "Stortingsvalget 1969. Hefte II", Statistisk Sentralbyrå.

[17] Rao, C.R. (1965): "Linear Statistical Inference and Its Applications", John Wiley & Sons, Inc.

[18] Spjøtvoll, E. (1971): "On the probability of at least one false rejection for various multiple testing techniques in the one-way layout in the analysis of variance", Statistical Research Report, University of Oslo.

[19] Spjøtvoll, E. (1972): "Joint confidence intervals for all linear functions of means in the one-way layout with unknown group variances", Biometrika, Vol 59, 683-685.

[20] Stuart, A. (1953): "The estimation and comparison of strengths of association in contingency tables", Biometrika, Vol 39, 105-110.

[21] Sverdrup, E. (1971): "Testing statistical hypotheses. The general Neyman-Pearson theory", Statistical Memoirs, University of Oslo.

[22] Sydsæter, K. (1973): "Matematisk analyse, bind II", Universitetsforlaget, Oslo-Bergen-Tromsø.