2006/67

Notater

Erling Holmøy

Non-Ponzi-Game betingelser og lukking av anvendte intertemporale likevektsmodeller

Notater

Forskningsavdelingen

1 Innledning

Dette notatet er ment å belyse noen egenskaper ved anvendte generelle likevektsmodelle som inneholder intertemporal adferd og dynamikk, herunder MSG6 utviklet i Statistisk sentralbyrå. Det vier særlig oppmerksomhet til implementering og betydningen av intertemporale budsjettbetingelser med uendelig horisont, ofte kalt Non-Ponzi-Game (NPG) betingelser. Målgruppen er først og fremst de som arbeider med numeriske dynamiske generelle likevektsmodeller, særlig de som arbeider med varianter av MSG6 modellen. Notatet springer ut av erfaringer jeg selv har gjort i forbindelse med ulike anvendte prosjekter. Det er skrevet ut fra en tro på at også andre kan ha nytte av den innsikten jeg selv høstet under forsøkene på å analysere og forstå bestemte modelldynamiske fenomener. Et annet og mindre beskjedent formål er er å demonstrere *en måte å arbeide på*; jeg mener bestemt at den som arbeider med numeriske modeller må konfrontere beregningsresultatene med formell analyse basert på stiliserte modeller av modellen. Det er nødvendig for å forstå resultater som kommer fra modeller som er så store og kompliserte at de fort kan anklages for å være svarte bokser som genererer ukontrollerbare resultater.

I *avsnitt 2* gjør jeg rede for hva en NPG-betingelse for en formuesvariabel faktisk innebærer. Konkret vil denne drøftingen være knyttet til netto utenlandsformue, men drøftingen har generell relevans for formuesutvikling.

I *avsnitt 3* analyserer jeg implikasjonene av NPG-betingelsen på netto utenlandsformue når denne inngår i en dynamisk generell likevektsmodell. Den analytiske modellen er utformet med tanke på å fange opp de viktigste mekanismene i MSG6. Siktemålet her er å klargjøre viktige makroøkonomiske mekanismer i bestemmelsen av forbruksutvikling, lønnsvekst og sparing. Jeg analyserer i denne forbindelse også hvordan valget av intertemporal lukking vil påvirke løsningen for utviklingen av disse variablene.

I *avsnitt 4* beskriver jeg hvordan intertemporale budsjettbetingelser med uendelig horisont kan implementeres i empiriske modeller. Når det gjelder utenlandsformuen i MSG6, er dette gjort tidligere i Bye og Holmøy (1997). Men fremstillingen der er basert på den meget urealistiske forutsetningen at alle strømningsvariable er stasjonære etter et gitt fremtidig år. Jeg viser hvordan vi lett kan implementere en modell der den simulerte veksten fortsetter uendelig lenge. Ved hjelp av simuleringer på MSG6 viser jeg også hvilken kvantitativ betydning det har å forutsette 0-vekst etter et gitt år i stedet for uendelig vekst.

Avsnitt 5 utvider analysen i forhold til foregående avsnitt ved å inkludere en intertemporal budsjettbetingelse for offentlig forvaltning. Jeg analyserer i denne sammenheng hvordan henholdsvis den relevante diskonteringsrenten og det "primære offentlige budsjettunderskuddet" bør defineres. Hovedpoenget her er at disse variabelverdiene ikke er uavhengige av hvilken sektor - utlandet eller husholdningene - som offentlig forvaltning har fordringer på. Jeg drøfter også hvordan en slik budsjettbetingelse kan brukes til å vurdere om finanspolitikken er opprettholdbar på lang sikt ("Fiscal Sustainability" (FS)), og diskuterer noen problemstillinger knyttet til FS-vurderinger.

Avsnitt 6 forlater konsumentadferd og generell likevektsanalyse, og viser hvordan den enkle nyklassiske bestemmelsen av bedriftenes kapitaletterspørsel, som bl.a. er forutsatt i MSG6, kan utledes uten bruk av optimal kontrollteori. Den fremgangsmåten jeg anvender er ikke "bedre" enn standardutledningen, men den får eksplisitt frem hvorfor man trenger en transversalitetsbetingelse på kapitalverdien i det korresponderende optimale kontrollproblemet. Denne transversalitetsbetingelsen har mye til felles med NPG-betingelsen, og heri ligger også forbindelsen til de foregående avsnittene.

2 NPG-betingelsens innhold og implikasjoner

La $B(t)$ være en formue på tidspunkt t, r en konstant rente på formuen og $X(t)$ sparingen eksklusive renteinntekter på tidspunkt t. Formuen vokser da ifølge

$$\dot{B} = rB + X. \tag{1}$$

Non-Ponzi-Game betingelsen uttrykkes vanligvis som

$$\lim_{t\to\infty} e^{-rt}B(t) = 0. \tag{2}$$

I det følgende skal vi tolke B som netto rentebærende utenlandsformue. Det er motivert av at meningsinnholdet ofte kommer klarere frem når man er konkret. Dessuten opererer man i flere av versjonene av MSG6 med NPG-betingelsen for nettopp denne variabelen. Resonnementene kunne selvsagt vært anvendt på andre formuesvariable. For enkelthets skyld ser vi bort fra stønader og lønn til og fra utlandet, og antar at alle kapitalinntekter kan uttrykkes som renteinntekter. Vi forutsetter dessuten at nåverdien av oljeinntektene frem til t, $\int_{s=0}^{t} O(s)\,e^{-rs}ds$, er inkludert i B_0. Utenlandsformuen vokser da ifølge

$$\dot{B} = rB + P_W X_W - P_I I \tag{3}$$

der X_W = eksport, I = import, P_I = importpris i NOK, P_W = eksportpris i NOK. r = verdensmarkedsrente. La g være en felles vekstrate for P_I og P_W, mens x_W og i er vekstratene for henholdsvis X_W og I. Vi skal se på tilfellet der alle vekstratene for eksport- og importpriser, eksport og import er konstante. Dette kan f.eks. være en lokal tilnærming rundt steady state. Differensialligningen for B blir da autonom og har løsningen:

$$
\begin{aligned}
B(t) &= B_0 e^{rt} + e^{rt} \int_{s=0}^{t} \left[X_{W0} e^{(g+x_W-r)s} - I_0 e^{(g+i-r)s} \right] ds \Leftrightarrow \\
B(t) e^{-rt} &= B_0 + \left(\frac{X_{W0}}{g + x_W - r} \right) \left(e^{(g+x_W-r)t} - 1 \right) - \left(\frac{I_0}{g+i-r} \right) \left(e^{(g+i-r)t} - 1 \right) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

(2) innebærer for den tilnærmede løsningen:

$$
\lim_{t\to\infty} e^{-rt} B(t) = 0 \Leftrightarrow B_0 = \frac{I_0}{r-g-i} - \frac{X_{W0}}{r-g-x_W}. \qquad (5)
$$

Vi har forutsatt at $r > g + i$ og $r > g + x_W$ slik at integralene konvergerer. Merk at omregningen av NPG-betingelsen til en operasjonell ligning ikke har noe med valget av modell å gjøre. Det eneste som er forutsatt for å få en lukket form på betingelsen, er konstante vekstrater for de involverte variable, slik at integralene kan regnes ut analytisk.

For å få bedre innsikt i strukturen i løsningen for formuesutviklingen og i hva NPG-betingelsen innebærer, er det instruktivt å se på spesialtilfellet der vekstratene for eksport- og importverdi er identiske, dvs. $i = x_W$. Definer den felles nominelle vekstraten for handelsstrømmene som $a \equiv g + i < r$ og initial nettoeksportverdi som $Y_0 = X_{W0} - I_0$. I dette tilfellet utvikler B seg ifølge ligningen

$$
\begin{aligned}
B(t) &= B_0 e^{rt} + e^{rt} \int_{s=0}^{t} Y_0 e^{(a-r)s} ds \\
&= B_0 e^{rt} + \frac{Y_0 \left(e^{(a-r)t} - 1 \right)}{a-r} e^{rt} \\
&= \left(B_0 + \frac{Y_0}{r-a} \right) e^{rt} + \frac{Y_0}{a-r} e^{at}.
\end{aligned}
$$

Leddet $\frac{Y_0}{a-r}$ har tolkningen som nåverdien av den akkumulerte (inntekts/utgifts)strømmen som vokser med raten $a - r$ uendelig lenge fra tidspunkt 0. $\frac{Y_0\left(1-e^{(a-r)t}\right)}{r-a}$ fanger opp at strømmen Y_0 *ikke* løper til uendelig. Vi må trekke fra nåverdien fra tidspunkt t til uendelig av denne strømmen. På tidspunkt t er nåverdien av $Y(t)$ lik $Y_0 e^{(a-r)t}$. Den akkumulerte nåverdien av denne inntektsstrømmen fra t til uendelig er $\frac{Y_0 e^{(a-r)t}}{r-a}$. Differansen mellom den akkumulerte nåverdien av disse to uendelige strømmene, kapitalisert frem til tidspunkt t, er $\frac{Y_0\left(e^{(a-r)t}-1\right)}{a-r} e^{rt}$.

NPG-betingelsen blir nå

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} e^{-rt} B(t) &= 0 \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} e^{-rt} \left[\left(B_0' + \frac{Y_0}{r-a} \right) e^{rt} + \frac{Y_0}{a-r} e^{at} \right] = 0 \Leftrightarrow \qquad (6) \\
B_0 &= -\frac{Y_0}{r-a} \qquad (7)
\end{aligned}
$$

siden $\lim_{t\to\infty} \frac{Y_0}{a-r} e^{(a-r)t} = 0$. Med positiv initial formue, krever mao. NPG-betingelsen at vi initialt har et importoverskudd, og dette vil øke over tid siden $r > a > 0$.

I uttrykket for $e^{-rt}B(t)$ vil *ikke* leddet $B_0 + \frac{Y_0}{r-a}$ forsvinne for alle variabelverdier etterhvert som $t \to \infty$. For at NPG-betingelsen skal holde, må leddet være 0 allerede initialt gjennom endogen bestemmelse av Y_0 eller a. NPG-betingelsen gir da ligningen $B_0 + \frac{Y_0}{r-a} = 0$, dvs. at nåverdien av inntekter og utgifter over en uendelig tidshorisont er like store, korrigert for initial formue.

Når vi tenker oss at NPG-betingelsen inngår som en relasjon i en simultan dynamisk modell, fjerner den en frihetsgrad. Den kan oppfylles gjennom endogen tilpasning av en og kun en variabelverdi, og merk at løsningen for denne endogene variabelen er den samme på alle tidspunkter. Det betyr at NPG-betingelsen ikke er en ligning av samme natur som de andre ligningene i modellen, f.eks. likevektsbetingelser for produkt- og arbeidsmarkeder. Hver enkelt av slike andre ligninger er egentlig et kontinium av ligninger som bestemmer et kontinium av variabelverdier, en på hvert tidspunkt, tilsammen en *tidsbane* for hver variabel. I simulatane modeller er det strengt tatt meningsløst å si at en bestemt ligning bestemmer en bestemt variabel, fordi "alt avhenger av alt". Men i ligningssystemer der relasjonene har bestemte tolkninger, kan det likevel ofte være instruktivt å uttrykke seg slik. Spesielt vil særpreget ved NPG-betingelsen gjøre at det er ”galt” å si at NPG-betingelsen bestemmer ”vanlige” endogene variable (som f.eks. Y), fordi disse variablene er kontinuerlige tidsfunksjoner ($Y(t)$). I stedet er det "riktig" å si at NPG-betingelsen bestemmer en skalar, dvs. enten en initialverdi eller en vekstrate, selv om NPG-betingelsen inngår i en simultan modell. (7) kan f.eks. "brukes til" å bestemme Y_0 (eller a), når r er eksogen.

Men (7)kan ikke brukes til å bestemme B_0. I en fornuftig økonomisk modell kan ikke initialverdier for beholdningsstørrelser bestemmes endogent, fordi disse er predeterminerte. Den endogene startverdien som assosieres med NPG-betingelsen vill ofte kalles ”hoppevariabel”. Grunnen er at denne initialverdien vil hoppe endogent straks det kommer ny informasjon som påvirker nåverdien av landets inntekter og utgifter i den intertemporale budsjettbetingelsen. I neste avsnitt setter vi NPG-betingelsen inn i en dynamisk generell likevektsmodell, og vi drøfter der betydningen av ulike "lukkinger" av modellen, dvs. betydningen av valget av endogen variabel som NPG skal assosieres med.

Hvis vi nå forutsetter at NPG-betingelsen er oppfylt (på en eller annen måte), degenererer formuesutviklingen til

$$B(t) = \left(B_0 + \frac{Y_0}{r-a}\right)e^{rt} + \frac{Y_0}{a-r}e^{at} = \frac{Y_0}{a-r}e^{at} = B_0 e^{at}. \tag{8}$$

siden NPG-betingelsen krever at den første parantesen er 0. Dette kan virke rart ved første øyekast; den positive formuen øker med vekstraten for importoverskuddet som her er lik den felles vekstraten for eksport og importverdi. Til tross for et initialt importoverskudd som øker med raten a, vil altså den positive formuen likevel også øke med rate a! Husk imidlertid at dette er veksten gitt at NPG-betingelsen er oppfylt. Forklaringen på at et økende importoverskudd kan gi en økende formue er renten på den positive formuen. Og grunnen til at renten likevel forsvinner i uttrykket for formuens tidsbane, er at NPG-betingelsen innebærer en balansering av renteinntekter mot importoverskudd.

For fullstendighetens skyld ser vi til slutt på hvordan B vil utvikle seg når vi forlater den forenklende forutsetningen hvor eksport- og importverdi vokser med en felles rate. Formuen bestemmes da av ligningen:

$$\begin{aligned} B(t) &= e^{rt}\left(B_0 + \frac{I_0}{g+i-r} - \frac{X_{W0}}{g+x_W-r}\right) \\ &\quad + \left(\frac{X_{W0}}{g+x_W-r}\right)e^{(g+x_W)t} - \left(\frac{I_0}{g+i-r}\right)e^{(g+i)t}. \end{aligned}$$

Her er uttrykket i den første parentesen lik 0 pga. NPG-betingelsen. Det betyr at formuen vokser i henhold til

$$B(t) = \frac{X_{W0}e^{(g+x_W)t}}{g+x_W-r} - \frac{I_0 e^{(g+i)t}}{g+i-r}.$$

Siden NPG-betingelsen innebærer at $\frac{I_0}{g+i-r} = \frac{X_{W0}}{g+x_W-r} - B_0$, kan formuesakkumulasjonen omskrives til

$$\begin{aligned} B(t) &= \frac{X_{W0}e^{(g+x_W)t}}{g+x_W-r} - \left(\frac{X_{W0}}{g+x_W-r} - B_0\right)e^{(g+i)t} \\ &= \left(\frac{X_{W0}}{g+x_W-r}\right)\left[e^{(g+x_W)t} - e^{(g+i)t}\right] + B_0 e^{(g+i)t}. \end{aligned}$$

Logikken i denne ligningen er helt analog med den som ble forklart i spesialtilfellet der $x_w = i$.

3 Betydningen av NPG-betingelsen i en dynamisk generell likevektsmodell

3.1 En stilisert modell av MSG6 modellen

For å se hva NPG betingelsen innebærer skal vi i dette avsnittet analysere implikasjonene av NPG-betingelsen på utenlandsformuen i en generell likevektsmodell. Modellen kan tolkes som en meget stilisert og forenklet representasjon av MSG6. Fellestrekkene er full sysselsetting, gitte verdensmarkedspriser og gitt rente, prisfast kvantumstilpasning på eksportmarkedet, monopolistisk konkurranse på hjemmemarkedet og prisavhengig importandel. De viktigste forenklingene er at vi ser på kun en privat sektor (utover offentlig bruk av arbeidskraft) som produserer kun en vare, arbeidsgiveravgift er eneste skatt, arbeidskraft er eneste innsatsfaktor og arbeidstilbudet er eksogent gitt. Oljeinntektene er en "gratis" valutagave. En substansielt sett mindre viktig forenkling er at vi forutsetter kun to sektorer. Den ene er en ren eksportsektor som har avtakende skalautbytte i produksjonen, slik at vi får tilbudssidebestemt eksport. Den andre sektoren konkurerer med import på hjemmemarkedet. I denne importkonkurrerende sektoren er det konstant skalautbytte og monopolistisk konkurranse. Forutsetningen her om konstant skalautbytte forenkler modellen ved at prisen på denne sektorens produkter blir uavhengig av produsert kvantum. Forenklingen kan forsvares ved at denne sektoren typisk vil være stor i forhold til eksportsektoren. De relative variasjonene i faktorbruk vil derfor være større i eksportsektoren enn i den importkonkurrerende sektoren. Dermed vil skalavariasjoner i praksis bety lite for marginalkostnadene i den sistnevnte.

Følgende ligninger er med i modellen (vi kommer tilbake til at den skal inneholde flere relasjoner):

$$L = \frac{1}{A}\left[\alpha_H X_H + (1-\alpha_H) X_W^{\frac{1}{s}}\right] + L_O \tag{9}$$

$$X_H = h\left(\frac{P_H}{P(P_H, P_I)}\right)^{-\sigma} C \tag{10}$$

$$I = (1-h)\left(\frac{P_I}{P(P_H, P_I)}\right)^{-\sigma} C \tag{11}$$

$$P_H = \frac{mW\tau}{A} \tag{12}$$

$$X_W = k\left(\frac{sP_W}{\frac{W\tau}{A}}\right)^{\frac{s}{1-s}} \tag{13}$$

$$\dot{B} = rB + O + P_W X_W - P_I I \tag{14}$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-rt} B(t) = 0 \tag{15}$$

Symbolforklaring: L = sysselsetting, A = produktivitetsfaktor, X_H = hjemmeleveranser, X_W = eksport, s = skalaelastisitet, L_O = offentlig sysselsetting, P_H = pris på hjemmeleveranser, P_I = importpris i NOK, P_W = eksportpris i NOK, $P(P_H, P_I)$ = prisindeks på sammensatt gode av import og hjemmeleveranser, C = privat konsum, h er initial andel av hjemmeleveranser i konsumet, m = mark-up sats, W = lønnssats, $\tau = 1+t$ der t = arbeidsgiveravgift, O = oljeinntekter, r = verdensmarkedsrente.

Tolkning av ligningene: (9) er likevektsbetingelsen på arbeidsmarkedet, der første ledd på h.s. er etterspørsel fra private bedrifter. (10) er etterspørselen etter hjemmeleveranser, (11) er etterspørselen etter import. (12) er den optimale prisen på hjemmeleveranser gitt monopolistisk konkurranse på hjemmemarkedet. (13) er det optimale eksportkvantum gitt at bedriftene er atomister på eksportmarkedet. (14) gir utviklingen i utenlandsformuen. (15) er NPG-betingelsen for utenlandsfomuen. Når vi forutsetter at det offentlige finansierer sine lønnsutgifter løpende gjennom en kombinasjon av arbeidsgiveravgift og rundsum skatt, er NPG-betingelsen ekvivalent med en intertemporal budsjettbetingelse for en eviglevende konsument når vi forutsetter at denne mottar overskuddet fra bedriftene i tillegg til lønn. Med endogen rundsum skatt som klarerer det offentlige budsjettet, trenger vi ikke spesifisere den offentlige budsjettbetingelsen fordi finansieringen ikke har noen realøkonomisk betydning utover den inntektseffekten som allerede er ivaretatt ved at offentlig ansatte L_O ikke bidrar til å produsere konsummuligheter.

De 6 ligningene (9) - (14) gjelder på alle $t \geq 0$. I tillegg kommer NPG-betingelsen som er kun en enkelt ligning. Modellen er ennå ikke determinert. Hvordan dette skal gjøres dreier seg om valget av såkalt "lukking" av modellen, og det er det som skal diskuteres i det følgende. Men uansett lukking vil variablene $L, A, P_I, P_W, s, h, O, r, \tau, L_O$, samt $B(0) = B_0$ være *eksogene*, og variablene $X_H, X_W, P_H, B(t)$ er uansett *endogene*. Status for W og C kommer vi tilbake til.

P_I, P_W og A er normalisert til 1 på tidspunkt $t = 0$. Antar følgende eksogene tidsbaner: $P_I(t) = P_I(0)e^{gt} = e^{gt}$, $P_W(t) = e^{gt}$, $L(t) = L_0 e^{lt}$, $L_O(t) = L_{O0}e^{\gamma t}$, $A(t) = e^{at}$. Skattesatsen forutsettes konstant, dvs. $\tau(t) = \tau$.

3.2 Løsning av modellen

Selv om modellen foreløpig ikke er determinert, kan vi likevel regne ut sammenhenger. Vi lar små bokstaver betegne marginale vekstrater. Eksempelvis er i vekstraten for importvolumet ($i \equiv \frac{dI}{dt}\frac{1}{I}$). Vi har

$$p_H = w - a \tag{16}$$

$$p = \theta_H p_H + \theta_I p_I = \theta_H (w - a) + \theta_I g \tag{17}$$

$$\begin{aligned} x_H &= -\sigma(p_H - p) + c = -\sigma\theta_I (p_H - g) + c && (18) \\ &= -\sigma\theta_I (w - a - g) + c && (19) \end{aligned}$$

$$i = -\sigma\theta_H (g + a - w) + c \tag{20}$$

$$x_W = \left(\frac{s}{1-s}\right)(g+a-w) \tag{21}$$

Vi forutsetter at $r > g+i$ og $r > g+x_W$, slik at nåverdiene beregnet på tidspunkt 0 av eksport- og importverdi på et fremtidig tidspunkt t konvergerer mot 0 når $t \to \infty$. σ substitusjonselastisiteten mellom norske og importerte varer i den innenlandske etterspørselen. θ_H er budsjettandelen for norske varer i konsumet. θ_I er den tilsvarende budsjettandelen for import. Dersom løsningen av modellen ga en konstant veksrate for lønnssatsen, ville eksporten vokse med en fast rate. Det vil imidlertid ikke være tilfelle for vekstratene for henholdsvis hjemmeleveransen (x_H), importen (i) og konsumet (c) fordi budsjettandeler og sysselsettingens fordeling på hjemmeproduksjon og eksport vil endres over tid når de relevante substitusjonselastisitetene er ulik 1.

I det følgende skal vi imidlertid analysere utviklingsbaner der vi med god tilnærmelse kan betrakte vekstratene for alle endogene variable som konstante (der ikke annet angis). Dette er et vanlig analytisk tricks i analyser av dynamiske likevektsmodeller. Typisk analyserer man dynamikken i en omegn av en stady state situasjon der man lineariserer modellen med utgangspunkt i steady state likevekten. Konstante budsjettandeler gir en bedre tilnærmelse desto nærmere de relevante substitusjonselastisitetene er 1.

Med konstante vekstrater kan vi, som forklart i forrige avsnitt, skrive NPG betingelsen:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} e^{-rt} B(t) &= 0 \Leftrightarrow \\ B_0 + \int_{s=0}^{t} O(s)\, e^{-rs} ds &\equiv B'(0) = \frac{I_0}{r-g-i} - \frac{X_{W0}}{r-g-x_W}, \end{aligned} \tag{22}$$

der $I_0 = (1-h)\, C_0$ og $X_{W0} = k\left(\frac{s}{W_0\tau}\right)^{\frac{s}{1-s}}$, og Vi forutsetter også at $\int_{s=0}^{t} O(s)\, e^{-rs} ds$ konvergerer når $t \to \infty$. Spesielt vil vi anta at $\frac{dO(s)}{ds} \leq 0$.

Innsetting av eksport- og hjemmeandelsrelasjonene i (9) gir (α_H = den importkonkurrerende sektorens initiale andel av samlet produksjon):

$$E \equiv AL - L_O = \alpha_H h \left(\frac{mW\tau}{AP\left(\frac{mW\tau}{A}, P_I\right)}\right)^{-\sigma} C + (1-\alpha_H)\, k' \left(\frac{sAP_W}{W\tau}\right)^{\frac{1}{1-s}}. \tag{23}$$

Det kan nå tenkes flere måter å lukke (determinere) modellen på. Dette betyr å finne den intertemporale banen for konsum og sparing. Vi kan skille mellom to hovedvarianter:

1. Bestemmelse fra *etterspørselssiden* gjennom interpemporal konsumentadferd.

2. Bestemmelse fra *tilbudssiden*. En slik bestemmelse tar utgangspunkt i at finanssparing for landet må skje gjennom akkumulasjon av overskudd på driftsbalansen

overfor utlandet. En eller annen gang må fordringer på utlandet være skapt av positiv netto eksport. Økning i nettoeksporten krever imidlertid overføring av ressurser fra skjermet til konkurranseutsatt sektor. I likevektsmodellen krever det bedring av konkurranseevnen gjennom lønnsnedgang (som svarer til en reell depresiering av kroner). Lønnsveksten vil bestemme nettoeksporten og dermed landets (finans)sparing. Dette vil vi kalle en tilbudssidebestemmelse av konsumbanen, siden konsumentenes intertemporale etterspørselsadferd nå ignoreres. Vi vil spesielt se på en situasjon der lønnsveksten er *konstant, men endogent bestemt* slik at NPG-betingelsen er oppfylt.

3.2.1 Etterspørselsbestemt konsumbane

Den varianten av bestemmelse fra etterspørselssiden vi skal se på, er å la konsumbanen være bestemt av en eviglevende Ramsey-konsument med perfekte forventninger. Et alternativ er å utvide Ramsey-adferden med vanedannelse, en andel av befolkningen som lever fra hånd til munn (Mankiw), eller betrakte konsumetterspørsel som en sum av intertemporal konsumentadferd i en rekke overlappende generasjoner, kombinert med befolkningsdynamikk (Blanchard, 1985). I Ramsey-varianten blir konsumets vekstrate bestemt av maksimering av en additiv intertemporal nyttefunksjon som gir Euler-ligningen

$$c = \sigma_C (r - p - \rho) = \sigma_C (r - \rho - \theta_H (w - a) - \theta_I g), \tag{24}$$

der ρ er konsumentens tidspreferanserate. Med konstante vekstrater får vi da at $C(t) = C_0 e^{ct}$,der det initiale konsumnivået C_0 er endogent og justeres momentant når det komer ny informasjon. For importveksten får vi da at

$$\begin{aligned} i &= -\sigma\theta_H (g + a - w) + c = -\sigma\theta_H (g + a - w) \\ &\quad +\sigma_C (r - \rho - \theta_H (w - a) - \theta_I g) \\ &= (\sigma - \sigma_C) \theta_H (w - a) - (\sigma_C \theta_I + \sigma\theta_H) g + \sigma_C (r - \rho). \end{aligned} \tag{25}$$

Definer den effektive tilgangen på arbeidskraft for privat sektor som $E \equiv AL - L_O$. Innsetting av konsumbanen i (23) gir

$$E = \alpha_H h \left(\frac{mW\tau}{AP\left(\frac{mW\tau}{A}, P_I\right)} \right)^{-\sigma} C_0 e^{ct} + (1 - \alpha_H) k' \left(\frac{sAP_W}{W\tau} \right)^{\frac{1}{1-s}}. \tag{26}$$

Siden (26) gjelder for alle $t > 0$, kan den settes på tilvekstform ($\lambda_H \equiv \frac{L_H}{E}$, $\lambda_W \equiv \frac{L_W}{E} = 1 - \lambda_H$):

$$\begin{aligned} e &= -\lambda_H \sigma [w - a - \theta_H (w - a) - \theta_I g] \\ &\quad +\lambda_H \sigma_C [r - \rho - \theta_H (w - a) - \theta_I g] + \lambda_W \left(\frac{a + g - w}{1 - s} \right), \end{aligned}$$

som løst med hensyn på w gir

$$w = \frac{\left[\lambda_H \sigma\theta_I + \lambda_W \left(\frac{1}{1-s}\right)\right](a+g) + \lambda_H \sigma_C (r-\rho-\theta_I g) - e}{\lambda_H(\sigma\theta_I + \sigma_C\theta_H) + \lambda_W\left(\frac{1}{1-s}\right)} \tag{27}$$

$$= \frac{(a+g) + \frac{\lambda_H\sigma_C(r-\rho-\theta_I g)-e}{\lambda_H\sigma\theta_I+\lambda_W\left(\frac{1}{1-s}\right)}}{1+\frac{\lambda_H\sigma_C\theta_H}{\lambda_H\sigma\theta_I+\lambda_W\left(\frac{1}{1-s}\right)}}. \tag{28}$$

Med realistiske anslag vil σ og særlig $\frac{1}{1-s}$være store i forhold til de andre variable. I MSG6 er f.eks. σ i størrelsesorden 6, mens $s \simeq 0,85 \Rightarrow \frac{1}{1-s} \simeq 7$. Alle ledd som er dividert med $\lambda_H\sigma\theta_I + \lambda_W\left(\frac{1}{1-s}\right)$ i (28)vil derfor være relativt små modifikasjoner av følgende vekstbane for lønnssatsen:

$$w \simeq a+g, \tag{29}$$

der $a+g$ er hovedkursen for lønnsveksten. (28) modifiserer lønnsveksten i forhold til hovedkursen av tre grunner:

1. $e > 0$, dvs. økt arbeidstilbud til privat sektor, målt i effektive timeverk, innebærer lavere grenseproduktivitet av arbeidskraften pga. avtakende skalautbytte. Økt arbeidstilbud krever derfor lavere lønn for å bli absorbert.

2. $r-\rho+\theta_I g > 0$ innebærer at konsumet vokser over tid. Det øker etterspørselen etter arbeidskraft. For å frigjøre arbeidskraft til konsumformål, må nettoeksporten reduseres gjennom suksessiv svekkelse av konkurranseevnen over tid. Det skjer ved høyere lønnsvekst.

3. $\lambda_H\sigma\theta_I + \lambda_W\left(\frac{1}{1-s}\right)$ er ikke uendelig stor. Også når $e = (r-\rho-\theta_I g) = 0$, vil produktivitetsendringene som skjer gjennom endringer i privat sysselsetting dempe lønnsevnen samenlignet med $a+g$ siden $\lambda_H\sigma_C\theta_H > 0$. Innsikt i årsaken kan oppnås ved å undersøke hva som vil bryte med likevektskravene dersom vi forsøker med $w = a+g$. Lønnsvekst lik $a+g$ gir vekst i P lik g (fordi $p = \theta_H p_H + \theta_I p_I = \theta_H(w-a) + \theta_I g$ $= \theta_H(a+g-a) + \theta_I g = g$). Dermed bidrar en slik lønnsvekst til intertemporal substitusjon; det initiale konsumet går opp, mens vekstraten for konsumet faller. Dette reflekteres av at σ_C inngår i nevneren i (28). Sammenlignet med situasjonen der denne nevneren er lik 1, reduseres vekstraten for etterspørselen etter arbeidskraft. Da svekkes også behovet for å øke lønnssatsen over tid.

Hvis vi antar at løsningen for lønnsveksten med god tilnærmelse gir en konstant lønnsvekst w, kan vi finne C_0 ved å sette inn konsumbanen og lønnsveksten i NPG-betingelsen:

$$\begin{aligned}
B_0' &= \frac{I_0}{r-g-i} - \frac{X_{W0}}{r-g-x_W} \\
&= \frac{(1-h)\,C_0}{r-g-[(\sigma-\sigma_C)\,\theta_H\,(w-a)-(\sigma_C\theta_I+\sigma\theta_H)\,g+\sigma_C\,(r-\rho)]} \\
&\quad -\frac{k\left(\frac{s}{W_0\tau}\right)^{\frac{s}{1-s}}}{r-g-\left(\frac{s}{1-s}\right)(g+a-w)} \\
&= \frac{(1-h)\,C_0}{r-(\sigma-\sigma_C)\,\theta_H\,(w-a)+(\sigma_C\theta_I+\sigma\theta_H-1)\,g-\sigma_C\,(r-\rho)} \\
&\quad -\frac{k\left(\frac{s}{W_0\tau}\right)^{\frac{s}{1-s}}}{r-g-\left(\frac{s}{1-s}\right)(g+a-w)}, \qquad (30)
\end{aligned}$$

som gir

$$C_0=\left[B_0'+\frac{k\left(\frac{s}{W_0\tau}\right)^{\frac{s}{1-s}}}{r-\frac{g+s(a-w)}{1-s}}\right]\left[\frac{r-\sigma_C\,(r-\rho)-(\sigma-\sigma_C)\,\theta_H\,(w-a)+(\sigma'-1)\,g}{1-h}\right].$$

der $\sigma'=\sigma_C\theta_I+\sigma\theta_H$ er det veide gjennomsnittet av de to substitusjonselastisitetene. Komparativ statikk (eller dynamikk) på denne modellen blir vanskelig selv under forutsetningen om konstante vekstrater for alle variable. Det skyldes først og fremst modifikasjonene av lønnsveksten i forhold til hovedkursen. I det følgende skal vi i stedet se på tilnærmelser der vi forutsetter at hovedkursen gjelder i bestemmelsen av det initiale konsumet. Her ser vi altså bort fra de tre modifikasjonene listet opp ovenfor. Når $w=a+g$ blir den tilnærmede løsningen for C_0:

$$\begin{aligned}
C_0 &\approx \left[B_0'+\frac{k\left(\frac{s}{W_0\tau}\right)^{\frac{s}{1-s}}}{r-g}\right]\left[\frac{r-\sigma_C\,(r-\rho)-(\sigma-\sigma_C)\,\theta_H g+(\sigma'-1)\,g}{1-h}\right] \\
&= \left[B_0'+\frac{k\left(\frac{s}{W_0\tau}\right)^{\frac{s}{1-s}}}{r-g}\right]\left[\frac{(r-g)\,(1-\sigma_C)+\sigma_C\rho}{1-h}\right], \qquad (31)
\end{aligned}$$

hvor vi har brukt at $-(\sigma-\sigma_C)\,\theta_H g+(\sigma'-1)\,g=[\sigma_C\theta_H-\sigma\theta_H+\sigma_C\theta_I+\sigma\theta_H-1]\,g=(\sigma_C-1)\,g$. Sammen med arbeidsmarkedslikevekten i $t=0$

$$E_0\equiv L_0-L_{O0}=\alpha_H h\,(mW_0\tau)^{-\sigma}\,C_0+(1-\alpha_H)\,k'\left(\frac{s}{W_0\tau}\right)^{\frac{1}{1-s}}, \qquad (32)$$

har vi nå to ligninger til bestemmelse av C_0 og W_0. Vi setter C_0 fra (31) inn i (32) og får løsning for W_0 implisitt:

$$E_0 = \frac{\alpha_H h}{(mW_0\tau)^{\sigma}}\left[B_0' + \frac{k\left(\frac{s}{W_0\tau}\right)^{\frac{s}{1-s}}}{r-g}\right]\left[\frac{(r-g)(1-\sigma_C)+\sigma_C\rho}{1-h}\right]$$
$$+(1-\alpha_H)\,k'\left(\frac{s}{W_0\tau}\right)^{\frac{1}{1-s}}, \tag{33}$$

som er basert på den forenklede løsningen for lønnsveksten.

For å øke innsikten i modellen skal vi nå se på virkninger av noen marginale partielle endringer.

Virkningen av partiell økning i E_0 ***, dvs.*** $de > 0$***:*** Dette kan skje ved økt arbeidstilbud eller lavere offentlig sysselsetting. Logaritmisk differensiering av (33) gir

$$\begin{aligned} e_0 &= -\left[\lambda_{H0}\left(\sigma + s\theta_{X_{W0}}\right) + \lambda_{W0}\right]\left(\frac{1}{1-s}\right) w_0 \Leftrightarrow \\ w_0 &= -\frac{(1-s)}{\left[\lambda_{H0}\left(\sigma + s\theta_{X_{W0}}\right) + \lambda_{W0}\right]} e_0, \end{aligned} \tag{34}$$

der $\theta_{X_{W0}} = \left(\frac{X_{W0}}{(r-g)B_0'+X_{W0}}\right)$. Merk at e_0 nå står for den marginale relative endringen i E på $t = 0$, altså ikke vekstraten for E over en marginal tidsøkning dt fra $t = 0$. Tilsvarende for $w(t)$, $c(t)$ og $x_W(t)$. (Husk at $w_0 = w(0)$, etc.) Økt E_0 krever altså lønnsnedgang på samme tidspunkt ($t = 0$). Den ekstra arbeidskraften absorberes via tre kanaler: 1) Eksporten øker, 2) importandelene faller, og 3) økt C_0 som fanges opp av leddet inneholdende $\theta_{X_{W0}}$. Mekanismen bak den siste effekten er at den økte nettoeksporten forrykker kravet om nåverdibalanse i utenriksøkonomien, uttrykt ved NPG-betingelsen. Denne balansen reetableres ved å øke C_0, fordi det øker importen.

Konsumvirkningen initialt blir tilnærmet:

$$c_0 = -\theta_{X_{W0}}\left(\frac{s}{1-s}\right) w_0 = \frac{\theta_{X_{W0}} s}{\lambda_{H0}\left(\sigma + s\theta_{X_{W0}}\right) + \lambda_{W0}} e_0. \tag{35}$$

Vekstraten for konsumet blir med $w = a + g$:

$$c = \sigma_C\left(r - \rho - \theta_H(w-a) - \theta_I g\right) = \sigma_C(r - \rho - g) \tag{36}$$

og dermed uavhengig av E. Konsumendringene på et vilkårlig tidspunkt blir derfor $c(t) = c_0$ så lenge c er uendret. Eksportendringen blir

$$x_W(t) = -\left(\frac{s}{1-s}\right) w(t) = -\left(\frac{s}{1-s}\right) w_0 = \frac{s}{\left[\lambda_{H0}\left(\sigma + s\theta_{X_{W0}}\right) + \lambda_{W0}\right]} e_0 \tag{37}$$

Virkningene av at verdensmarkedsprisene vokser raskere, dvs. $dg > 0$***:*** Innenfor den forenklede løsningen for lønnsveksten får vi $dw = dg$, alternativt $\frac{dw}{w} = \left(\frac{g}{a+g}\right)\frac{dg}{g} = \frac{dg}{a+g}$. Konsumveksten endres med $dc = -\sigma_C dg$. Logaritmisk differensiering av (33) gir lønnsendringen initialt, gitt de forenklede løsningene:

$$0 = -\left[\lambda_{H0}\left(\sigma + s\theta_{X_{W0}}\right) + \lambda_{W0}\right]\left(\frac{1}{1-s}\right) w_0 \tag{38}$$

$$+\lambda_{H0} g\left[\theta_{X_{W0}}\left(\frac{1}{r-g}\right) + \frac{\sigma' - 1}{r - \sigma_C\left(r-\rho\right) + \left(\sigma' - 1\right) g}\right]\frac{dg}{g}, \tag{39}$$

som gir

$$w_0 = (1-s)\frac{\left[\frac{\theta_{X_{W0}}}{r-g} + \frac{\sigma'-1}{r-\sigma_C(r-\rho)+(\sigma'-1)g}\right]}{\sigma + s\theta_{X_{W0}} + \frac{\lambda_{W0}}{\lambda_{H0}}} dg, \tag{40}$$

som betyr at raskere veksttakt i internasjonale priser gir rom for lønnsøkning også initialt. Intuisjonen her er at klammeparentesen uttrykker den partielle økningen i C_0 som følge av raskere prisvekst internasjonalt. Denne virkningen på C_0 skyldes for det første dels intertemporal substitusjon i favør av konsum i dag. For det andre øker nåverdien av eksportinntektene, men denne effekten motvirkes av at utgiftene knyttet til den initiale importbanen også øker, samt samt importutgiftene isolert sett faller som følge av substitusjon vekk fra import.

Konsumendringen initialt følger av logaritmisk differensiering av (31), når vi også tar hensyn til lønnseffekten (lar $g' \equiv \frac{dg}{g}$):

$$\begin{aligned}
c_0 &= \theta_{X_{W0}}\left[\left(\frac{-s}{1-s}\right) w_0 - \left(\frac{-g}{r-g}\right) g'\right] + \left(\frac{\left(\sigma'-1\right) g}{r - \sigma_C\left(r-\rho\right) + \left(\sigma'-1\right) g} g'\right) \\
&= \theta_{X_{W0}}\left(\frac{-s}{1-s}\right) w_0 + \left[\frac{\theta_{X_{W0}}}{r-g} + \frac{\sigma'-1}{r-\sigma_C\left(r-\rho\right)+\left(\sigma'-1\right) g}\right] dg \Leftrightarrow \\
\frac{c_0}{dg} &= \theta_{X_{W0}}\left(\frac{-s}{1-s}\right)(1-s)\frac{\left[\frac{\theta_{X_{W0}}}{r-g} + \frac{\sigma'-1}{r-\sigma_C(r-\rho)+(\sigma'-1)g}\right]}{\sigma + s\theta_{X_{W0}} + \frac{\lambda_{W0}}{\lambda_{H0}}} \\
&\quad + \left[\frac{\theta_{X_{W0}}}{r-g} + \frac{\sigma'-1}{r-\sigma_C\left(r-\rho\right)+\left(\sigma'-1\right) g}\right] \\
&= -\frac{s\theta_{X_{W0}}\left[\frac{\theta_{X_{W0}}}{r-g} + \frac{\sigma'-1}{r-\sigma_C(r-\rho)+(\sigma'-1)g}\right]}{\sigma + s\theta_{X_{W0}} + \frac{\lambda_{W0}}{\lambda_{H0}}} \\
&\quad + \frac{\theta_{X_{W0}}}{r-g} + \frac{\sigma'-1}{r-\sigma_C\left(r-\rho\right)+\left(\sigma'-1\right) g}.
\end{aligned} \tag{41}$$

3.2.2 Tilbudssidebestemt konsumbane

En mulig tilbudssidebestemmelse av konsum og sparing er å anta at lønnsdannelsen skjer gjennom forhandlinger mellom organsasjoner i arbeidslivet, og at forhandlingsløsningen er i tråd med hovedkursmodellen. Ifølge denne modellen skal lønnsveksten bestemmes av veksten i lønnsevnen i konkurranseutsatt sektor. Siden vi i vår modell har forutsatt konstante vekstrater for produktivitet og verdensmarkedspriser, er det i denne modellen naturlig å anta at lønnsveksten også skal være konstant. Men dersom forhandlingene resulterer i $w = a + g$, mens utgangsnivået W_0 er endogent, degenererer modellen til den forenklede versjonen av modellen vi studerte i foregående avsnitt, der konsumveksten var konsistent med maksimering av Ramsey-konsumentens intertemporale preferanser. Dette følger av at (den forenklede) modellen per forutsetning har entydig løsning.

Vi skal i stedet se på et annet alternativ der vi forutsetter at lønnsnivået i hver periode er bestemt av fjorårets nivå pluss en endogen men konstant vekstrate. I vår modell med kontinuerlig tid svarer det til at W_0 er eksogent gitt (predeterminert), mens w er endogen. Det gir en genuint annen løsning enn den vi fikk ved etterspørselsbestemt konsumvekst, også når vi sammenligner med den forenklede løsningen av denne. (22) og (23) bestemmer da $C(t)$ og w.

Når W_0 er eksogent gitt følger eksporten, X_{W0}, og sysselsettingen i eksportproduksjonen initialt, L_{W0}, direkte. Vi har $L_{W0} = (1 - \alpha_H) k' \left(\frac{s}{W_0'}\right)^{\frac{1}{1-s}}$. C_0 bestemmes da direkte av likevektsbetingelsen for arbeidsmarkedet:

$$E_0 = \alpha_H h (m\tau W_0)^{-\sigma} C_0 + L_{W0} \Leftrightarrow C_0 = \left(\frac{E_0 - L_{W0}}{\alpha_H}\right) \frac{(m\tau W_0)^{\sigma}}{h}. \tag{42}$$

Løsningen i starttidspunktet er helt uavhengig av (forventninger om) fremtiden, fordi løsningen for $t = 0$ er uavhengig av NPG-betingelsen. Løsningen for C_0 viser at initialt konsumnivå bestemmes av tilgangen på effektive ressurser, fratrukket de ressursene som anvendes til eksport. Det siste leddet tar hensyn til at tilgangen på ressurser rent "fysisk" er større desto større importandelen er. Høyere τW_0 betyr lavere konkurranseevne og og lavere nettoeksport, slik at ressurser frigjøres til konsum.

Hvilken rolle spiller nå den intertemporale budsjettbetingelsen? Med denne lukkingen ivaretas den av endogen vekst i konsumet, som vist nedenfor. Dette er stikk motsatt av det en Ramsey-lukking gir. Ramsey-aktøren vil beholde konsumets vekstrate uendret så lenge konsumrealrenten er uendret, mens C_0 vil tilpasses gjennom hopp til ny informasjon om den intertemporale budsjettbetingelsen.

Siden (23) gjelder for alle $t > 0$, kan den settes på tilvekstform:

$$\begin{aligned} e &\equiv \left(\frac{AL}{E}\right)(a+l) - \left(\frac{L_O}{E}\right) l_O \\ &= \lambda_H \left[\sigma\theta_I (a+g-w) + c\right] + (1-\lambda_H)\left(\frac{1}{1-s}\right)(a+g-w) \qquad (43) \\ &= (a+g-w)\left[\lambda_H (\sigma\theta_I + c) + (1-\lambda_H)\left(\frac{1}{1-s}\right)\right]. \qquad (44) \end{aligned}$$

Klammeparentesen uttrykker endringen i etterspørselen fra hjemmekonkurrerende og eksportkonkurrerende bedrifter som følge av at norske kostnader øker i forhold til verdensmarkedsprisene, samt at konsumet vokser over tid med raten c. Merk at forutsetningen om konstant w innebærer at c ikke vil være konstant over tid når λ'ene og θ_I varierer.

Som vi så i forrige avsnitt, vil $w < a+g$ (for realistiske verdier av c) dersom tilbudet av effektive arbeidstimer til privat sektor øker, dvs. $e > 0$ siden klammeparantesen er positiv. Dette reflekterer avtakende skalautbytte. Når $s \to 1$, vil klammeparantesen vokse over alle grenser, slik at $w \to a+g$. Vi skal i det følgende anta at $e > 0$. Definer $z \equiv a+g-w$. z og c bestemmes simultant av ligningene

$$e = z\left[\lambda_H (\sigma\theta_I + c) + (1-\lambda_H)\left(\frac{1}{1-s}\right)\right] \qquad (45)$$

$$B_0' = \frac{(1-h)\, C_0}{r-g+\sigma\theta_H z - c} - \frac{X_{W0}}{r-g-\left(\frac{s}{1-s}\right)z}. \qquad (46)$$

Vi minner om at $B_0' \equiv B_0 + \int_{s=0}^{t} O(s)\, e^{-rs} ds$. (45) løst mhp. z gir:

$$z = \frac{e}{\lambda_H (\sigma\theta_I + c) + (1-\lambda_H)\left(\frac{1}{1-s}\right)}, \qquad (47)$$

men NPG-betingelsen gjør det ikke mulig å få z og c på lukket form. Imidlertid kan vi få en lukket form løsning som gir god tilnærmelse til den riktige (men fortsatt forenklede løsninger basert på konstante vekstrater) dersom vi antar at $\lambda_H (\sigma\theta_I + c) + (1-\lambda_H)\left(\frac{1}{1-s}\right) \simeq \lambda_H \sigma\theta_I + (1-\lambda_H)\left(\frac{1}{1-s}\right) \equiv y$. Tolkningen av dette er at y er konkurranseevneeffekten på sysselsettingen av en økning i kostnadene, og at denne dominerer importlekasjeeffekten $\lambda_H c$. Det er tilfellet når σ er stor og s er nær 1, mens c er liten i forhold til disse variablene. I MSG6 vil $\sigma \approx 6$, importandelen er rundt 0,5, mens s er mellom 0,85 og 1, slik at $\frac{1}{1-s} > 6,7$. Til sammenligning vil c variere mellom 0,02 og 0,03. Med neglisjering av konsumvekstvirkningen på z, dvs. på w, får vi rekursivitet i bestemmelsen av z og c. For z får vi av (45)

$$z = \frac{e}{\lambda_H (\sigma\theta_I + c) + (1-\lambda_H)\left(\frac{1}{1-s}\right)} = \frac{e}{y+\lambda_H c} \simeq \frac{e}{y}. \qquad (48)$$

Dvs. at lønnsveksten langs likevektsbanen tilnærmet blir

$$w = a + g - z \simeq a + g - \frac{e}{y}. \tag{49}$$

Her er, som nevnt, $a + g$ lik lønnsvekstraten i hovedkursmodellen. Det ekstra leddet fanger opp lønnseffekten av endringer i arbeidstilbudet som går mot 0 når $s \to 1$ og $\sigma \to \infty$. I MSG6, blir korreksjonen relativt beskjeden. Også med denne lukkingen følger det at likevektsutviklingen for timelønnskostnadene i hovedsak drives av produktivitetsvekst og økningen i verdensmarkedsprisene på eksport, som i hovedkursmodellen.

Konsumets vekstrate blir bestemt av NPG-betingelsen:

$$\begin{aligned} c &= r - g + \sigma\theta_H z - \frac{(1-h)\,C_0}{B_0' + \frac{k\left(\frac{s}{W_0\tau}\right)^{\frac{s}{1-s}}}{r-g-\left(\frac{s}{1-s}\right)z}} && (50) \\ &\simeq r - g + \sigma\theta_H \frac{e}{y} - \frac{(1-h)\,C_0}{B_0' + \frac{k\left(\frac{s}{W_0\tau}\right)^{\frac{s}{1-s}}}{r-g-\left(\frac{s}{1-s}\right)\frac{e}{y}}}, && (51) \end{aligned}$$

der den siste tilnærmelsen ser bort fra at konsumveksten har tilbakevirkning på lønnsveksten, som igjen er med på å bestemme konsumveksten.

Vi skal ikke foreta formelle komparativ statikk øvelser på denne modellen, men nøyer oss med å konstatere at en romsligere intertemporal budsjettbetingelse, dvs. $dB_0' > 0$, gir rom for høyere konsumvekst. En gitt økning i B_0' kan f.eks. skyldes økte oljeinntekter. Det er intuitivt ganske oplagt innenfor denne modellen. Det initiale konsumnivået er bestemt av ressursbruken og produktiviteten i privat sektor som produserer konsumvarer, etter at vi har trukket fra den ressursbruken som går med til den eksporten som er bestemt av konkurranseevnen initialt, og den er gitt av den eksogene W_0. Imidlertid vil en komparativ statikk analyse av f.eks. økt B_0' ikke få med seg noen virkning på lønnsveksten dersom man regner på den forenklede modellen som forutsetter $w = a + g - \frac{e}{y}$. Dette tilsier at *komparativ statikk* bør utføres på den mer fullstendige modellen som tar hensyn til at endret konsumvekst påvirker lønnveksten.

Vi ser også at virkningene på konsumveksten av alle endringer som øker konsumet initialt, vil inneholde et fratrekk representert ved det siste leddet i (51). Det skyldes den intertemporale budsjettbetingelsen. Høyere r har motstridende effekter på c. Dersom det ikke hadde vært hverken oljeinntekter eller tradisjonell eksport, ville økningen i c vært like stor som økningen i r. Årsaken er at økt r betyr lavere nåverdi av importen. Men økt r reduserer $B_0' \equiv B_0 + \int_{s=0}^{t} O(s)\, e^{-rs} ds$, hvilket gjør at c kan øke mindre enn r. I tillegg vil økt r også bety at nåverdien av eksporten faller.

4 Praktisk implementering av NPG-betingelser

Bye og Holmøy (1997) beskriver hvordan en intertemporal budsjettbetingelse med uendelig horisont for utenlandsgjeld kunne implementeres i empiriske modeller a la MSG6. Imidlertid ble det der forutsatt at alle strømningsvariable når et stasjonært nivå fra og med et fremtidig år, fortrinnsvis mer enn femti år frem i tid. Dette er en klart urealistisk forutsetning, men den kan ha neglisjerbar betydning for utviklingen i den første del av banen - den som har størst interesse - dersom effekten av neddiskontering er sterk. Men med vekst over en uendelig horisont kan misvisningen i løsningen bli betydelig. I det følgende viser jeg hvordan man enkelt kan implementere budsjettbetigelser med uendelig horisont uten slike urealistiske restriksjoner, samt hvilken tallmessig betydning dette har.

4.1 Non-Ponzi game betingelsen i diskret tid

For å gjøre formlene mer sammenlignbare med dem som er implementert i en faktisk anvendt generell likevektsmodell, opererer vi nå med diskret tidsoppløsning. La B_t være netto fordringer ved utgangen av periode t, r_t er renten i periode t, og Z_t er den relevante nettofinansinvesteringen i periode t. Notasjonen dekker de to tilfellene: 1) B er Norges netto finansformue overfor utlandet, og Z er verdien av eksportoverskuddet, ev. justert for stønader, netto lønn og aksjeutbytte fra utlandet; 2) B er offentlig forvaltnings netto finansformue, og Z er det som ofte omtales som det primære offentlige budsjettoverskuddet. Definisjonsmessig gjelder

$$B_t = (1 + r_t) B_{t-1} + Z_t. \tag{52}$$

Vi tenker oss at den intertemporale budsjettbetingelsen inngår i en modell der Z_t avhenger av bl.a. en konstant men endogen variabel, X, samt en vektor A_t av eksogene variable:

$$Z_t = z(A_t, X) \tag{53}$$

I en modell med Ramsey-konsument vil X være grensenytten av penger. Det kan også være vekstraten for privat konsum per capita, en skattesats eller vekstraten for timelønnskostnadene.

Vi tenker oss nå at modellberegningene strekker seg fra år $t = 0$ til $t' > 0$. Valget av t' er slik at vekstraten for de relevante strømningsvariablene har stabilisert seg når $t = t'$. Spesielt er r konstant og $Z_{t+1} = (1 + g) Z_t$ for $t > t'$. Vi forutsetter $g < r$, ellers ville ikke de geometriske rekkene (som korresponderer med nåverdi-ingegralene når tiden varierer kontinuerlig) nedenfor konvergere. Vi har da for $t = t' + j$, $j = 1, 2, ...$

$$\begin{aligned}
B_{t>t'} &= B_{t'-1}(1+r)^{t-t'+1} + \textstyle\sum_{j=t'}^{t}(1+r)^{t-j} Z_j \\
&= B_{t'-1}(1+r)^{t-t'+1} + Z_{t'} \textstyle\sum_{j=t'}^{t}(1+r)^{t-j}(1+g)^{j-t'} \\
&= B_{t'-1}(1+r)^{t-t'+1} + Z_{t'}(1+r)^{t-t'} \textstyle\sum_{j=t'}^{t}\left(\dfrac{1}{1+R}\right)^{j-t'}, \qquad (54)
\end{aligned}$$

der R er den vekstkorrigerte renten (ofte kalt netto renten) definert ved $\frac{1}{1+R} = \frac{1+g}{1+r} \Leftrightarrow R = \frac{1+r}{1+g} - 1 = \frac{r-g}{1+g}$.

For $t \leq t'$ bygges formuen opp ifølge formelen

$$B_{t\leq t'} = B_{-1}\textstyle\prod_{s=0}^{t}(1+r_s) + \sum_{j=0}^{t}\prod_{s=j+1}^{t}(1+r_s) Z_j \qquad (55)$$

Definer nåverdien beregnet ved begynnelsen av år k (dvs. ved utgangen av år $k-1$) av en formue målt i periode $t > k$ som $PB_{k-1}(t)$:

$$PB_{k-1}(t) = B_t \textstyle\prod_{s=k}^{t}\left(\dfrac{1}{1+r_s}\right). \qquad (56)$$

Non-Ponzi game betingelsen er i periode k

$$\lim_{t\to\infty} PB_{k-1}(t) = 0. \qquad (57)$$

Vi transformerer (57) nå til en ekvivalent men operasjonell betingelse for $k = t'$. Først setter vi inn uttrykket for B_t fra (54):

$$\begin{aligned}
PB_{-1}(t) &= \left[B_{t'-1}(1+r)^{t+1-t'} + Z_{t'}(1+r)^{t-t'}\textstyle\sum_{j=0}^{t-t'}\left(\dfrac{1}{1+R}\right)^{j}\right]\left(\dfrac{1}{1+r}\right)^{t-t'}\textstyle\prod_{s=0}^{t'}\left(\dfrac{1}{1+r_s}\right) \\
&= \left[B_{t'-1}(1+r) + Z_{t'}\textstyle\sum_{j=0}^{t-t'}\left(\dfrac{1}{1+R}\right)^{j}\right]\textstyle\prod_{s=0}^{t'}\left(\dfrac{1}{1+r_s}\right) \qquad (58)
\end{aligned}$$

Non-Ponzi game betingelsen innebærer at klammeparentesen er lik null når $t \to \infty$, dvs. når $n \to \infty$.

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} PB_{-1}(t) &= 0 \Leftrightarrow B_{t'-1}(1+r) = -Z_{t'}\lim_{j\to\infty}\textstyle\sum_{j=0}^{n}\left(\dfrac{1}{1+R}\right)^{j} = -Z_{t'}\left(\dfrac{1+r}{r-g}\right) \Leftrightarrow \\
B_{t'-1}(r-g) &= -Z_{t'} = z(A_t, X). \qquad (59)
\end{aligned}$$

Her er $B_{t'-1}$ predeterminert fra (55). Det er ligningen (59) som brukes til å bestemme X.

Forutsetningen $g = 0$ fra og med de siste simuleringsårene er helt unødvendig og kan gi meget misvisende resultater. Med store verdier for $B_{t'-1}$ vil f.eks $g = r/2$ gi betydelige utslag. La oss konkretisere dette gjennom et eksempel. Anta at all utenlandsformue er samlet på statens hånd i oljefondet. I St.meld. nr. 8 (2004-2005) ("Perspektivmeldingen") forventes f.eks. realavkastningen fra oljefondet å stabilisere seg på 6 prosent av trend-BNP for Fastlands-Norge (s. 89). Med 4 prosent realavkastning gir dette at fondet er $1,5*$trend-BNP for Fastlands-Norge. Anta at den nominelle verdensmarkedsrenten er 5,5 prosent, at både eksport og import i faste priser vokser med en felles rate på 2 prosent, og at alle verdensmarkedsprisene vokser med 1,5 prosent. Importoverskuddet vokser da med (tilnærmet) 3,5 prosent per år, målt i løpende priser. Antakelsen om 0-vekst i importoverskuddet ($g = 0$) ville gitt rom for et stasjonært importoverskudd fra og med $t = t'$ lik $Z_{t'} = B_{t'-1}(r - g) = 0,055 * 1,5 * Y =$ 8,25 prosent av BNP for Fastlands-Norge. Den riktige, vekstkorrigerte beregningen gitt et tilsvarende rom på 3 prosent. Dette er en stor forskjell! Siden både Norge og det offentlige er rentenister i den fjerne delen av banen, og økonomien vokser, vil vi uten vekstkorreksjon generelt undervurdere de fremtidige utgiftene og tillate for lave nettofinansinvesteringer (som typisk gir for høyt konsum) i den nære delen av perioden.

I et avsnitt nedenfor skal vi beregne nøyaktig ved hjlep av MSG6 betydningen for det makroøkonomiske forløpet frem til 2050 av at man erstatter 0-vekst med mer realistisk vekst etter 2050.

4.2 Operasjonell tilnærming av vekstrater

Man kan med stor rett hevde at forutsetningene for at vekstmodeller med flere goder og sektorer skal generere konvergens mot en balansert (steady state) vekstbane der alle variable vokser med samme rate, er til dels svært urealistiske (homotetiske preferanser, uniform og utelukkende arbeidsutvidende teknisk endring, uniform vekst i alle eksogene variable, herunder olje- og gassproduksjon (!), konstant skalautbytte o.s.v.) Samtidig er alternativet til steady state også helt urealistisk når man forlenger vekstbaner i det uendelige. Med økonomisk vekst vil f.eks. varer med Engel-elastisitet større enn 1 til slutt absorbere hele budsjettet til konsumentene. Her er det viktig å sondre mellom en praktisk god implementering av NPG-betingelsen og selve realismen i vekstbanene.

Jeg tar i det følgende ikke sikte på å løse de logiske problemer man vil møte ved å la ubalansert økonomisk vekst pågå uendelig lenge. Utfra mottoet "Det beste må ikke bli det godes fiende" har jeg begrenset meg til å finne en implementering av NPG-betingelsen som jeg mener er klart bedre enn å anta 0-vekst. Så får utformingen av selve vekstbanene bli et spørsmål om eksogene forutsetninger og evt. endringer i andre deler av modellstrukturen. Mitt forslag legger ingen restriksjoner på modellen og modellbanene ndg. balansert vekst.

Jeg tar utgangspunkt i at man i langsiktige fremskrivninger som regel genererer baner der vekstraten for enkeltvariable, også temmelige store grupper av variable, har stabilisert seg. Mitt forslag er at man utvider opplegget foran ved å splitte den "primære overskuddsvariabelen" Z opp i et overkommelig antall bruttovariable som vokser med en tilnærmet konstant rate i f.eks. de siste ti årene av simuleringsperioden. For utenriksøkonomien bør Z splittes i 1) eksportverdi for olje og gass, 2) eksportverdi for andre (tradisjonelle) varer, 3) importverdi. For den primære offentlig budsjettbalansen bør oppsplitingen få med 1) petroleumsinntekter, 2) formuesinntekter, 3) direkte skatter, 4) indirekte skatter og gebyrer, 5) alderspensjoner, 6) andre pensjoner; 7) andre overføringer; 8) offentlig konsum.

Når vi som følge av en slik oppsplitting har $Z_t = \sum_i Z_{it}$ og $Z_{it} = (1+g_i) Z_{it-1}$, tar NPG-betingelsen formen

$$B_{t'-1} = \left(\frac{1}{1+r}\right) \sum_i \left[-Z_{it'} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1+g_i}{1+r}\right)^j\right] = -\sum_i \frac{Z_{it'}}{r-g_i} \tag{60}$$

Om det gjør det enklere å finne konstante vekstrater, kan man også splitte Z_{it} i en volum og en priskomponent

$$Z_{it} = P_{it}Q_{it} = \left(1+g_i^P\right)\left(1+g_i^Q\right) P_{it-1}Q_{it-1}, \tag{61}$$

slik at betingelsen over blir

$$B_{t'-1} = -\sum_i \frac{P_{it-1}Q_{it-1}}{r - \left[\left(1+g_i^P\right)\left(1+g_i^Q\right)-1\right]}. \tag{62}$$

4.3 Algoritme

Modellen må være lukket på en konsistent måte slik at den endogene variable, X, som assosieres med den intertemporale Non-Ponzi Game (NPG) betingelsen, er konstant over tid. I fortsettelsen undertrykker vi vektoren A_t i $Z_t = z(A_t, X)$.

1. Løs modellen for en startverdi for $X = X_0$, uten NPG-betingelsen. Simuler modellen over årene $[0, t']$ der t' er valgt slik at vekstratene for variable som inngår i NPG-betingelsen er tilnærmet konstante. Beregn spesielt den akkumulerte formuen $B_{t'-1}(0) = B_{-1}\prod_{s=0}^{t'-1}(1+r_s) + \sum_{j=0}^{t'-1}\prod_{s=j+1}^{t'-1}(1+r_s) Z_j(X_0)$. Beregn også den eller de relevante vekstraten(e) som et gjennomsnitt av vekstratene for de relevante årene over de siste simuleringsperiodene, f.eks. de fem siste. Disse vil generelt avhenge av startverdien X_0, dvs. $g_0 = g(X_0)$. Disse skal være estimatorer på vekstratene fremover. Beregn også hva som kreves av formue for å betjene fremtidige betalinger, dvs. $-\left(\frac{Z_{t'}(X_0)}{r-g(X_0)}\right)$.

2. Hvis $B_{t'-1}(0) > -\left(\frac{Z_{t'}(X_0)}{r-g(X_0)}\right)$ har sparingen vært for stor. Basert på innsikt om modellen justeres X. Hvis f.eks. B er utenlandsformuen, Z eksportoverskuddet og X er

lønnsveksten, vet vi at høyere lønnsvekst gir lavere Z og dermed lavere B. Hvis X er pengegrensenytten, vet vi at lavere X gir høyere nytte, som krever høyere konsum og import. Anta at $\frac{\partial B_{t'-1}}{\partial X} < 0$ fordi $\frac{\partial Z_{t'}}{\partial X} < 0$. Velg ny startverdi $X_1 > X_0$. Justeringene tilpasses det man etter hvert vet om modelleegenskapene og iterasjonsprosessen. (Jeg går ikke her inn på hvordan man i praksis oppdaterer X for å finne en optimal avveining mellom rask konvergens mot løsningen og stabilitet i algoritmen. Selv primitive oppdateringer som ikke utnytter den informasjonen man suksessivt oppnår om $\frac{\partial B_{t'-1}}{\partial X}$, har vist seg å konvergere etter få MSG6-beregninger.)

3. Gjenta trinn 1 basert på X_1. Gjenta trinn 2 og juster X på nytt.

4. Proessen har konvergert etter k iterasjoner når $B_{t'-1}(k)$ og $-\left(\frac{Z_{t'}(X_k)}{r-g(X_k)}\right)$ er tilnærmet like.

4.4 Hvor mye betyr vekst i den fjerne fremtid for de nærmeste tiår?

4.4.1 En numerisk illustrasjon

Jeg vil besvare dette spørsmålet ved å presentere en sammenligning av to fremskrivninger av norsk makroøkonomi generert ved simulering av MSG6. De eksogene forutsetningene frem til 2050 er identiske i begge baner og er beskrevet i Heide, Holmøy, Solli og Strøm (2006). I begge fremskrivninger er modellen lukket ved en NPG-betingelse for netto utenlandsformue, og modellen er determinert ved endogen bestemmelse av en konstant vekstrate for gjennomsnittlig timelønnskostnad. Det som skiller de to fremskrivningene er forløpet etter 2050 i variable som avgjør hvor romslig den utenriksøkonomiske intertemporale budsjettbetingelsen er. I den ene fremskrivningen er det forutsatt 0-vekst i både løpende eksport- og importverdi etter 2050. I den alternative banen forutsettes eksport- og importverdi å vokse med rater som ligger nær en forlengelse av de simulerte vekstratene i årene forut for 2050. De fremførte årlige vekstratene for eksport- og importpriser er 1,5 prosent, veksratene for eksport- og importvolumene for ulike varer varierer stort sett mellom 2 og 3 prosent per år. Tabell 1 viser, med 0-vekst banen som basis, prosentvise forskjeller mellom disse to MSG6-baserte fremskrivningene for sentrale makrovariable i 2025 og 2050.

De simulerte forskjellene viser at konkurranseevnen overfor utlandet må bedres før 2050 når man tar hensyn til videre vekst over en uendelig horisont. Det skyldes at norsk økonomi initialt har positive netto fordringer på utlandet, som finansierer et løpende importoverskudd. Sammenlignet med generell 0-vekst, vil videreføring av veksten i import- og eksportverdi da øke nåverdien av importoverskuddet etter 2050. For å oppfylle NPG-betingelsen må det derfor akkumuleres en høyere netto finansformue i løpet av simuleringsperioden. Det krever en lavere lønnsvekst, fordi det da blir lønnsomt å øke eksporten og redusere importandelene. Høyere nettoeksport fortrenger privat konsum. Siden vi har beregnet en ny og lavere endogen konstant vekstrate for timelønnskostnaden, forsterkes forskjellene mellom de to fremskrivningene over tid. Utslagene på BNP-veksten er svake sammenlignet med endringene i etterspørselens sammensetning. En lavere lønnsvekst gir noe lavere vekst i kapitalintensiteten. På den annen side bidrar omallokeringen fra konsum til eksport til en viss økning i produktiviteten.

Tabell 1: Virkning av å erstatte 0-vekst med vekstforlengelse etter 2050 i MSG6-fremskrivninger. Prosentvis avvik fra fremskrivning med 0-vekst etter 2050

	2025	2050
Privat konsum	-3,3	-5,7
Bruttoinvesteringer	-2,7	-2,3
Eksport	7,3	11,9
Import	-0,9	-4,0
BNP	-0,6	-0,8
Timelønnskostnad	-2,6	-5,0
Utbetalt timelønn	-1,4	-1,9
Konsumpriser	-1,3	-3,5
Netto frodringer på utlandet/BNP	21,9	67,5

4.4.2 Eksogene håndgrep i MSG6 når $B_{t'-1}$ blir "for høy"

Et spørsmål som kan dukke opp ved MSG6 beregninger, er hvordan man skal "styre" en banene for å unngå at formuen antar verdier som modellbrukeren vurderer som urealistiske av grunner som ikke er implementert i modellen. Det vil typisk kunne skje dersom inntektene, spesielt oljeinntektene inntjenes tidlig, og at disse gir grunnlag for vekst langt frem i tid, f.eks. ved at lukkingen bestemmer en vekstrate som gjør at importoverskuddet er en voksende funksjon av tiden. Enhver reduksjon av formuen på et gitt fremtidig tidspunkt må innebære at nettoeksport utsettes i tid. Det kan skje på en flere måter:

1. Eksogen oppjustering av nivået på gjennomsnittlige lønnskostnader tidlig i banen, før vi beregner den endogene vekstraten som da tar utgangspunkt i dette nye nivået. Dette kan teknisk gjøres i MSG6 ved at justering av alle PLJUSTj (eksogene), der j løper over produksjonssektorer.

2. Oppjustering av eksportpriser og oppjustering av importpriser etter 2045. Vekstratene fra 2045-2050 er estimatet på fremtidig vekst mot uendelig som benyttes i makroen som fanger opp NPG-betingelsen. Dette ville redusere behovet for formue i 2050. Dette vil særlig slå ut dersom eksport- og importverdiveksten er nær renten. Derfor vil reduksjon av renten etter 2045 forsterke effekten. Dette er imidlertid ikke helt uproblematisk ved alle lukkinger av modellen. F.eks. vil den vanlige Euler-ligningen ved Ramsey-lukking være basert på konstant rente. "Tiltaket kan evt. suppleres med omvendte endringer i vekstratene før 2045.

3. Eksogen oppjustering av importandeler før 2045. Det vil gi rom for høyere konsum og redusere formuesoppbyggingen. Hvis importandelene så reduseres etter 2045, vil behovet for formue i 2050 være mindre. Tolkningen av dette er at konsumbanen i større grad følger løpende inntekt, et resultat vi ville fått med "normal" spareadferd, spesielt i en saver-spender modell, se Mankiw (2000).

5 NPG-betingelser for både offentlig forvaltning og landet som helhet

I dette avsnittet skal vi se nærmere på situasjonen der det gjelder en intertemporal budsjettbetingelse for offentlig forvaltning. Denne er av samme type som den vi har studert foran, dvs. at den er gitt ved en akkumulasjonsligning for offentlig nettofinansformue og en NPG-betingelse for denne formuen som følge av at offentlig forvaltning forutsettes å være en eviglevende institusjonell sektor. Som vi har sett, innebærer en slik intertemporal budsjettbetingelse at nåverdien av offentlige inntekter pluss initial netto finansformue må være lik nåverdien av offentlige utgifter, der begge nåverdier er definert over en uendelig horisont. Resonnementene foran er selvsagt gyldige selv om vi bytter navn på den institusjonelle sektor fra "landet som helhet" til offentlig forvaltning.

Grunnen til at jeg likevel skal se nærmere på den offentlige budsjettbetingelsen, er at verken valget av relevant rentesats i diskonteringen eller avgrensningen av det "primære offentlige budsjettunderskuddet" er opplagt. Begge variable avhenger av om offentlig formuesoppbygging består av fordringer på innenlandske husholdninger eller på utlandet. Konkret: Dersom den offentlige formuesoppbyggingen skjer ved utlån til innenlndske husholdninger, vil den relevante rentesatsen for den offentlige formuen være rente etter skatt på renteinntekter. Dersom den offentlige formuesoppbyggingen skjer ved å bygge opp fordringer på utlandet, blir ikke den relevante rentesatsen nedjustert av et slikt rentefradrag.

For å få presis innsikt i denne avhengigheten må vi studere en modell med intertemporale budsjettbetingelser både for offentlig forvaltning og for landet som helhet. I en generell likevektsmodell følger det av Walras' lov at en disse to budsjettbetingelsen implisitt innebærer at også husholdningene overholder en intertemporal budsjettbetingelse, gitt at landet deles i kun de to institusjonelle sektorerene offentlig forvaltning og husholdningene. Den intertemporale budsjettbetingelsen for landet kan mao. like gjerne erstattes av en intertemporal budsjettbetingelse for husholdningene. Husholdningene må da tolkes som en eviglevende Ramsey-konsument.

For utregningen av NPG-betingelsen for offentlig forvaltning er det essensielt å skille ut alle komponenter på det offentlige budsjettet som avhenger av formuen i seg selv via renten. At finansinntekter har en slik avhengighet, er opplagt. Men med dagens skattesystem vil også skatteinntektene inneholde komponenter som er avhengig av formue og rente. Det skyldes at renteinntekter beskattes, mens renteutgifter kan trekkes fra i skattegrunnlaget. Dette gjelder for både personbeskatningen og overskuddsbeskatningen av selskaper. Anta imidlertid at alt overskudd deles ut til personlige aksjonærer, slik at det ikke akkumuleres formue på selskapenes hånd.

Betydningen av rentefradraget kommer tydeligst frem når vi først betrakter en lukket økonomi som et referansetilfelle.

5.1 Lukket økonomi

I en lukket økonomi må offentlig forvaltnings finansformue motsvares av en like stor gjeld i husholdningssektoren. Vi forutsetter lik rente på gjeld og fordringer. Definer T som den del av det primære budsjettoverskuddet, X, som påvirkes av skattereglene for husholdningenes finansinntekter og -utgifter. La $X' = X - T$. Vi har nå

$$\dot{B}_O = rB_O + X' + T = rB_O + X' + \tau r\left(-B_O\right) = r_N B_O + X' \tag{63}$$

der B_O nå er offentlig netto finansformue, τ er den relevante skattesatsen på renteinntekter, $r_N \equiv (1-\tau)\,r$ er rente etter skatt. Vi har antatt at det ikke er noen grenser for skattefradraget av gjeldsrenter. I prinsippet åpner formuleringen over for at det offentlige betaler skatt til husholdningene dersom renteutgiftene overstiger andre skattepliktige inntekter. Løsningen for B_O blir nå helt analog med det vi fant foran:

$$B_O\left(t\right) = e^{r_N t}\left[B_{O0} + \left(\frac{X_0'}{g - r_N}\right)\left(e^{(g-r_N)t} - 1\right)\right], \tag{64}$$

der g er vekstraten for X', forutsatt konstant. For at $e^{-r_N t}B_O\left(t\right)$ skal konvergere, må klammeparantesen være lik 0. Det betyr at den relevante rentesatsen i uttrykket for NPG-betingelsen må være lik renten etter skatt. Altså

$$\lim_{t\to\infty} e^{-r_N t} B_O(t) = 0 \Leftrightarrow B_{O0} = -\frac{X_0'}{r_N - g}. \tag{65}$$

To konklusjoner kan trekkes av disse enkle sammenhengene:

1. Begrepet "primært offentlig budsjettunderskudd" omfatter alle inntekter utenom formuesinntektene, herunder alle skatter. I vurderinger av "Fiscal sustainability" (FS) basert på (65), er det misvisende å bruke en slik definisjon av primært budsjettunderskudd dersom renteutgifter gir skattefradrag. Det relevante budsjettunderskuddet må renses for alle inntekts- og utgiftsposter som er avhengige av den offentlige formuen. Spesielt gjelder dette rentefradraget i skattegrunnlaget.

2. Den relevante diskonteringsrenten for FS vurderinger er rente etter skatt.

Nedjustering av den effektive diskonteringsrenten gir en tilsvarende nedjustering av den øvre grensen for hva g kan være for at NPG-betingelsen skal være meningsfull, dvs. at nåverdien av det korrigerte primære budsjettunderskuddet skal eksistere (dvs. at integralet bak (64) konvergerer). I Norge beskattes renteinntekter med 28 %. Plausible verdier på nominell rente og nominell vekst i X' er $r = 0,055$ og $g = 0,045$. Det gir $r - g = 0,01$ (en lik deflatering av begge størrelser endrer selvsagt ikke differensen mellom dem), mens $r_N - g = 0,055(1 - 0,28) - 0,045 = -0,0054$. Med plausible tallanslag havner vi altså i en situasjon der $B(t)$ eksploderer, NPG-betingelsen kan ikke oppfylles, så sant ikke $B_{O0} = X_0' = 0$.

Gitt at $r_N - g > 0$, og $B_{O0} > 0$, bidrar rentefradraget til at den offentlige budsjettbetingelsen blir strammere; neddiskonteringen av de fremtidige underskuddene blir svakere, og formuesavhengige skatter "gjelds ikke". Holmøy (2006) diskuterer nærmere FS vurderingenes avhengighet av diskonteringsrente.

5.2 Åpen økonomi

Vi ser nå på en åpen økonomi hvor husholdningenes (= privat sektor) gjeld ikke lenger er lik offentlig formue. For å gjøre diskusjonen konkret, betrakter vi følgende enkle modell:

$$X = A(L - L_O) \tag{66}$$

$$W = AP \tag{67}$$

$$X = C + Z \tag{68}$$

$$\dot{B}_P = r(1-\tau) B_P + W(1-\tau) L - PC \tag{69}$$

$$\dot{B}_O = rB_O + \tau WL + \tau r B_P - WL_O \tag{70}$$

Her er X produksjon i privat sektor, L er eksogen samlet sysselsetting, L_O er eksogen offentlig sysselsetting, W er lønnssats, A er eksogen arbeidsproduktivitet, P er produktpris, eksogent gitt på verdensmarkedet, C er privat konsum, Z er eksportoverskudd, τ er en skattesats på lønn og kapitalinntekter, r er en eksogen verdensmarkedsrente, B_P og B_O er hhv. husholdningenes og offentlig forvaltnings netto finansformue. Vi normaliserer enheter slik at $A = P = 1$. Da blir også $W = 1$. Produktfunksjonen i privat sektor er lineær, og det er fullkommen konkurranse. Eksportoverskudd er den eneste sparemuligheten for landet som helhet.

Løsningen av differensialligningen for $\dot{B}_P$ gir følgende utviklingen i privat formue:

$$\begin{aligned} B_P(t) &= B_{P0}e^{r_N t} + e^{r_N t}\int_{s=0}^{t}\left[(1-\tau)L(s) - C(s)\right]e^{-r_N s}ds \\ &= B_{P0}e^{r_N t} + \left[\frac{(1-\tau)L_0\left(e^{(g_L - r_N)t}-1\right)}{g_L - r_N} - \frac{C_0\left(e^{(g_C - r_N)t}-1\right)}{g_C - r_N}\right]e^{r_N t} \quad (71) \end{aligned}$$

Utviklingen i offentlig formue blir mer komplisert, fordi den avhenger av privat formue via skatten på renteinntekter. For å determinere modellen og finne løsningen for $B_O(t)$ går vi veien via budsjettbetingelsen for landet som helhet. Denne utleder vi fra økosirkiske sammenhenger. Summering av de to ligningene for netto finansinvesteringer i privat og offentlig sektor gir landets netto finansinvestering, B_N (dropper tidsindeks):

$$\begin{aligned} \dot{B}_P + \dot{B}_O &= r(1-\tau)B_P + (1-\tau)L - C + rB_O + \tau L + \tau r B_P - L_O \\ &= r(B_P + B_O) + (L - L_O) - C = r(B_P + B_O) + Z, \quad (72) \end{aligned}$$

slik at $B_N = B_P + B_O$ og $\dot{B}_N = rB_N + Z = rB_N + X - C$. Løsningen for B_N blir:

$$B_N(t) = B_{N0}e^{rt} + e^{rt}\int_{s=0}^{t}\left[X_0 e^{g_X s} - Ce^{g_C s}\right]e^{-rs}ds, \quad (73)$$

som gir

$$B_N(t)e^{-rt} = B_{N0} + \left(\frac{X_0}{g_X - r}\right)\left(e^{(g_X - r)t}-1\right) - \left(\frac{C_0}{g_C - r}\right)\left(e^{(g_C - r)t}-1\right). \quad (74)$$

Gitt at både g_X, g_Z og g_C er mindre enn r, innebærer NPG-betingelsen for B_N:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-rt}B_N(t) = 0 \Leftrightarrow B_{0N} = \frac{C_0}{r - g_C} - \frac{X_0}{r - g_X}. \quad (75)$$

Hvis vi nå forutsetter at NPG-betingelsen for B_N er oppfylt (uten at vi tar stilling til hvordan dette har skjedd), og at $0 < g_X = g_C = g_Z < r$, degenererer utviklingen i den nasjonale finansformuen til

$$\begin{aligned} B_N(t)e^{-rt} &= B_{N0} + \left(\frac{X_0 - C_0}{g_Z - r}\right)e^{(g_Z - r)t} + \frac{C_0 - X_0}{g_Z - r} = \left(\frac{X_0 - C_0}{g_Z - r}\right)e^{(g_Z - r)t} \Leftrightarrow (76) \\ B_N(t) &= \left(\frac{X_0 - C_0}{g_Z - r}\right)e^{g_Z t} = B_{N0}e^{g_Z t}. \quad (77) \end{aligned}$$

Som påpekt foran, vil den opprettholdbare veksten i netto utenlandsformue sammenfalle med veksten i importoverskuddet, og det vil i denne enkle modellen være et positivt importoverskudd ($Z < 0$) i alle perioder når den initiale netto finansformuen for landet er positiv.

Siden $B_P = B_N - B_O$, kan vi finne B_O ved å utnytte løsningen for B_N, gitt forutsetningen om $g_X = g_Z$. Først skriver vi veksten i B_O som:

$$\begin{aligned}\dot{B}_O &= rB_O + \tau L + \tau r\left(B_N - B_O\right) - L_O & (78)\\ &= \left(1-\tau\right) rB_O + \tau r B_N + \tau L_P - \left(1-\tau\right) L_O & (79)\\ &= r^N B_O + \tau r B_{N0} e^{g_Z t} + \tau X - \left(1-\tau\right) L_O. & (80)\end{aligned}$$

Løsningen for denne differensialligningen blir

$$B_O\left(t\right) e^{-r^N t} = B_{O0} + \int_{s=0}^{t} \left[\tau\left(rB_{N0} + X_0\right) e^{g_Z s} - \left(1-\tau\right) L_{O0} e^{g_O s}\right] e^{-rs} ds,$$

som kan omformes til

$$\begin{aligned}B_O e^{-r^N t} &= B_{O0} + \tau\left(\frac{rB_{N0} + X_0}{r^N - g_Z}\right)\left(1 - e^{\left(g_Z - r^N\right)t}\right)\\ &\quad - \frac{\left(1-\tau\right) L_{O0}}{r^N - g_O}\left(1 - e^{\left(g_O - r^N\right)t}\right)\\ &= B_{O0} + \frac{\tau\left(rB_{N0} + X_0\right)}{r^N - g_Z} - \frac{\left(1-\tau\right) L_{O0}}{r^N - g_O}\\ &\quad + \frac{\left(1-\tau\right) L_{O0}}{r^N - g_O} e^{\left(g_O - r^N\right)t} - \tau\left(\frac{rB_{N0} + X_0}{r^N - g_Z}\right) e^{\left(g_Z - r^N\right)t}. & (81)\end{aligned}$$

Hvis r^N er større enn både g_O og g_Z, går de to siste leddene mot 0 når $t \to \infty$. For at NPG-betingelsen skal holde for offentlig formue, må

$$B_O e^{-r^N t} = 0 \Leftrightarrow B_{O0} = \frac{\left(1-\tau\right) L_{O0}}{r^N - g_O} - \frac{\tau\left(rB_{N0} + X_0\right)}{r^N - g_Z}. \qquad (82)$$

På høyre siden er det første leddet nåverdien av offentlige utgifter, og det andre leddet er nåverdien av offentlige inntekter, begge regnet eksklusive rentestrømmer direkte til og fra det offentlige. (82) er altså den intertemporale offentlige budsjettbetingelsen. Vi konstaterer følgende i vurderingen av denne:

1. Det er renten etter skatt på renteinntekter som skal brukes i oppblåsingen fra årlig strøm til nåverdi. Som påpekt i foregående avsnitt, kan realistiske anslag meget vel gi $r^N - g_i < 0, i = O, Z$, i det minste når denne effektive diskonteringsraten regnes ut for enkelte offentlige utgifter der utgiftsveksten er bestemt av f.eks. pensjonssystemets

regelverk og demografi. I så fall er forutsetningene bak utregningene brutt. Selv om $r^N - g_i > 0$ for alle relevante komponenter i, kan forskjellen mellom $\left(r^N - g_i\right)$ og $(r - g_i)$ bli meget stor for plausible tallanslag. Anta for eksempel at $r = 0,06$, $\tau = 0,28$, som innebære $r_N = 0.043$, og at $g_O = g_Z = 0,04$. Med $r_N - g = 0,003$, blir budsjettbetingelsens krav til τ eller L_{O0}, for gitt B_{O0}, meget sensitivt for skattesatsen på renteinntekter og de andre størrelsene som bestemmer $r^N - g$. Bruk av rente før skatt som diskonteringsrente er en feil som bidrar til en slakkere offentlig budsjettbetingelse. Med tallverdiene over, blir beløpene som transformeres til nåverdier bli $\frac{r-g}{r_N-g} = 6,7$ ganger større.

2. Til gjengjeld skal skatteinntektene i telleren inkludere en imputert skatt på nasjonale renteinntekter. Dette kommer inn, sammen med korreksjonen av nevneren, fordi privat sektor kan ha renteinntekter fra utlandet.

Sammenlignet med nåverdiberegninger som ikke tar hensyn til skatt på renteinntekter, trekker korreksjonen av telleren i retning av at nødvendig formue på tidspunkt $t = 0$ kan reduseres, gitt at denne er positiv. På den annen side trekker korreksjonen av nevneren i motsatt retning. I praksis skal det mye til at ikke korreksjon 1) vil dominere og øke kravet til formue ved $t = 0$, siden den vekstkorrigerte diskonteringsrenten allerede er lav.

Innsetting av NPG-betingelsen for offentlig formue gir følgende utvikling i offentlig netto finansformue:

$$B_O(t) = \frac{(1-\tau)\,L_{O0}}{r^N - g_O} e^{g_O t} - \tau \left(\frac{r B_{N0} + X_0}{r^N - g_Z} \right) e^{g_Z t}. \tag{83}$$

5.3 Noen spesialtilfeller

5.3.1 $B_P(t) = 0$ for alle t

I dette tilfellet eier det offentlige alle fordringene på utlandet. Akkumulasjonsligningen for B_O forenkler seg nå til

$$\dot{B}_O = r B_O + \tau X - (1-\tau)\,L_O, \tag{84}$$

som er løst foran. Dette spesialtilfellet er viktig i den forstand at det er det eneste tilfellet hvor det blir riktig å bruke rente *før* skatt i neddiskonteringen av offentlige inntekter og utgifter. På den annen side er dette tilfellet neppe særlig realistisk. Det svarer for eksempel til Keynesiansk spareadferd med sparetilbøyelighet lik 0, gitt 0 initial privat formue.

5.3.2 Uniform vekst, dvs. $0 < g = g_O = g_Z = g_X = g_C < r$

(83) forenkler seg nå til

$$B_O(t) = \frac{(1-\tau) L_{O0} - \tau (r B_{N0} + X_0)}{r^N - g} e^{gt} = B_{O0} e^{gt}, \tag{85}$$

fordi NPG-betingelsen for B_O nå innebærer at $B_{O0} = \frac{(1-\tau)L_{O0} - \tau(rB_{N0}+X_0)}{r^N - g}$.

5.3.3 $B_{P0} = 0$, men $B_P(t)$ kan avvike fra 0 for $t > 0$

Her er kun *initial* privat netto finansformue er null. $B_{P0} = 0 \Leftrightarrow B_{N0} = B_{O0}$. Innsetting i (83) gir

$$B_O(t) = \frac{(1-\tau) L_{O0}}{r^N - g_O} e^{g_O t} - \tau \left(\frac{r B_{O0} + X_0}{r^N - g_Z} \right) e^{g_Z t}. \tag{86}$$

Ved å sette inn for $t = 0$ ser vi at dette innebærer en bestemt restriksjon på den initiale offentlige budsjettbalansen:

$$\begin{aligned} B_{O0} &= \frac{(1-\tau) L_{O0}}{r^N - g_O} - \tau \left(\frac{r B_{O0} + X_0}{r^N - g_Z} \right) \Leftrightarrow && (87) \\ \frac{B_{O0}(r - g_Z)}{r^N - g_Z} &= \frac{(1-\tau) L_{O0}}{r^N - g_O} - \frac{\tau X_0}{r^N - g_Z}. && (88) \end{aligned}$$

som innsatt i (86) gir

$$\begin{aligned} B_O(t) &= \frac{(1-\tau) L_{O0}}{r^N - g_O} e^{g_O t} - \tau \left(\frac{r B_{O0} + X_0}{r^N - g_Z} \right) e^{g_Z t} \\ &= \frac{\left[B_{O0}(r - g_Z) + \tau X_0 \right] e^{g_O t} - \tau (r B_{O0} + X_0) e^{g_Z t}}{r^N - g_Z} && (89) \\ &= \frac{B_{O0} \left[(r - g_Z) e^{g_O t} - \tau r e^{g_Z t} \right] + \tau X_0 \left(e^{g_O t} - e^{g_Z t} \right)}{r^N - g_Z}. && (90) \end{aligned}$$

5.4 Nødvendigheten av steady-state vekst når horisonten er uendelig

De foregående avsnittene har vist at realistiske anslag på den effektive neddiskonteringsraten (dvs. relevant rente minus vekstraten for en variabel) som bør brukes i numeriske vurderinger av den intertemporale offentlige budsjettbetingelsen, kan bli meget små. Jo mindre de effektive diskonteringsratene er, desto tyngre teller fremtiden i nåverdiberegningene. Når tiden går mot uendelig, vil forlengelse av ulike eksponensielle veksttrender før eller senere bryte kravene til likevekt. F.eks. vil en høyere vekstrate for offentlig sysselsetting enn for arbeidstilbudet føre til at offentlig sektor på et visst tidspunkt absorberer all arbeidskraft. Tilsvarende vil det med ulike inntektselastisiteter for varer bare være et tidsspørsmål når varen med høyest inntektselastsisitet sluker hele budsjette for konsumenten. Men man har i praksis havnet i en situasjon der likevekten ikke eksisterer, en god stund før slike meningsløsheter inntreffer.

Disse betraktningene har viktige og problematiske implikasjoner for praktiske vurderinger av om budsjettpolitikken er opprettholdbar (se også Holmøy (2006)):

1. Beregninger som per definisjon har uendelig tidshorisont må forutsette at økonomien konvergerer mot en meningsfull steady state vekst. Selv om betingelsene for steady state er urealistiske i lys av empiri, er alternativet enda "verre"; vekst som aldri konvergerer mot steady state ender før eller senere i meningsløse tilstander.

2. Fravær av steady-state vekst kan gi løsninger som verken er teoretisk eller praktisk mulige likevekter, før offentlig forvaltning har havnet i en håpløs finansiell posisjon.

3. Vanligvis vil diskontering sørge for at den fjerne fremtiden ikke betyr så mye for de nærmeste tiår eller nåverdier. Det betyr at det heller ikke er så avgjørende for løsningene for den nærmeste og mest interessante del av tidshorisonten at man pålegger urealistiske steady-state betingelser fra og med et fjerntliggende fremtidig tidspunkt. Men dette krever at diskonteringsrenten er større enn den uniforme steady state vekstraten.

4. Steady state vekst betyr at alt vokser med samme rate. For at offentlige inntekter og utgifter skal vokse med denne felles vekstraten, må det legges sterke restriksjoner på hvordan man fastlegger de eksogene variable. Dette gjelder særlig offentlige utgifter som i høy grad er styrt av demografi og regelverk.

5. Spesielt vil en steady state fra et år $t\prime$ i realiteten bety at man *ad hoc* legger inn et betydelig bidrag til løsningen av det offentlige finansieringsproblemet dersom den mest realistiske vekstraten for offentlige utgifter ligger over steady state vekstraten. Bestemmelsen av $t\prime$ innebærer derfor at man i realiteten ikke kan si at man har uendelig horisont. Det riktige er å si at man baserer nåverdiberegningene på mest mulig realistiske anslag frem til $t\prime$, mens utviklingen deretter i en viss forstand er eksogent fastlagt slik at den ikke gjør finansieringsproblemene uhåndterlige, i den forstand at de eksogent begrenses slik at relevante nåverdier lar seg beregne.

5.5 Anslag på "Fiscal Gap" med vekst som midlertidig avviker fra steady state

I dette illustrerer jeg betydningen av valget av diskonteringsrente for beregninger av såkalt "fiscal gap". Fiscal gap defineres som differensen mellom faktisk akkumulert offentlig netto finansformue formue på et tidspunkt $t = t'$ og den offentlige formuen som på $t = t'$ er nødvendig for at NPG-betingelsen for offentlig formue skal holde, gitt utviklingen i offentlige inntekter og utgifter.

Vi skal tenke oss at realistiske modellberegninger skjer til $t = t'$. Etter t' forutsettes en steady-state vekstbane. Modellen er den samme som i avsnitt 5.2 foran, dvs. en liten åpen økonomi der det eneste gode er en handelsvare med pris gitt eksogent på verdensmarkedet. Vi normaliserer enhetene ved å la P være konstant lik 1. Også arbeidstilbudet og verdensmarkedrsenten er eksogene og konstante.

Før det er lagt på noen NPG-betingelse, utvikler offentlig formue seg ifølge (81). På $t = t'$ blir den

$$B_O\left(t'\right) = B_{O0}e^{r^N t'} + \tau\left(\frac{rB_{N0} + X_0}{r^N - g_Z}\right)\left(e^{r^N t\prime} - e^{g_Z t'}\right) \tag{91}$$

$$- \left(\frac{(1-\tau)\, L_{O0}}{r^N - g_O}\right)\left(e^{r^N t\prime} - e^{g_O t'}\right). \tag{92}$$

For $t \le t'$ kan vi ha $r^N < g_Z$ og eller $r^N < g_O$. Skatteleddet, dvs. uttrykket som inneholder g_Z, blir fortsatt positivt da både $\frac{rB_{N0}+X_0}{r^N-g_Z} < 0$ og $e^{r^N t\prime} - e^{g_Z t'} < 0$. Tilsvarende for utgiftsleddet, dvs. uttrykket som inneholder g_O.

For $t > t'$ forutsetter vi imidlertid steady state vekst, slik at $g_O = g_Z < r^N$. For skatteleddet har vi allerede innført forutsetninger som gjør at alle offentlige inntekter vokser med raten g_Z. På $t = t'$ har de offentlige inntektene, ekskl. renteinntekter, I, kommet opp på nivået $I(t') = \tau (rB_{N0} + X_0)\, e^{g_Z t'}$. Nåverdien av disse inntektene fra $t > t'$, beregnet på $t = t'$ blir

$$I^N\left(t'\right) = \frac{\tau\left(rB_{N0} + X_0\right) e^{g_Z t'}}{r^N - g_Z} \tag{93}$$

Tilsvarende får vi for utgiftene, U, når også disse vokser med raten g_Z, for $t > t'$:

$$U^N\left(t'\right) = \frac{(1-\tau)\, L_{O0}e^{g_O t'}}{r^N - g_Z}. \tag{94}$$

Fremført til $t = t'$ er kravet til offentlig nettoformue for at NPG-betingelsen skal holde at

$$B_O^*\left(t'\right) = U^N\left(t'\right) - I^N\left(t'\right) \tag{95}$$

$$= \frac{(1-\tau)\, L_{O0}e^{g_O t'} - \tau\left(rB_{N0} + X_0\right) e^{g_Z t'}}{r^N - g_Z}. \tag{96}$$

Den presise definisjonen av Fiscal Gap målt $t = t'$ er $B_O^*(t') - B_O(t')$, dvs. forskjellen mellom den nødvendige og den faktisk akkumulert offentlig formue. I vår modell blir dette

$$B_O^*(t') - B_O(t') = \frac{(1-\tau)\,L_{O0}e^{g_O t'} - \tau\,(rB_{N0}+X_0)\,e^{g_Z t'}}{r^N - g_Z} \tag{97}$$

$$-B_{O0}e^{r^N t'} - \tau\left(\frac{rB_{N0}+X_0}{r^N - g_Z}\right)\left(e^{r^N t\prime} - e^{g_Z t'}\right) \tag{98}$$

$$+\left(\frac{(1-\tau)\,L_{O0}}{r^N - g_O}\right)\left(e^{r^N t\prime} - e^{g_O t'}\right). \tag{99}$$

Alternativt kan fiscal gap måles på $t = 0$ ved en nedjustering av alle ledd med $e^{-r^N t}$.

Talleksempler: La $t' = 2050$. En av fremskrivningene i Heide, Holmøy, Solli og Strøm (2006) ga (tall i tusen mrd. løpende kroner): $B_O(t') = 8,2$, $I(t') = 4,3$ og $U(t') = 5,0$. Anta at for $t > 2050$ har $\tau = 0,28$, $g_Z = 0,04$. Et realistisk anslag på r vil være i størrelsesorden 5,5 - 6,0 prosent. Men da blir $r^N - g_Z$ negativ. Hvis vi i stedet setter r såpass høyt som $0,083$, blir $r^N - g_Z = 0,02$, og nødvendig formue blir da $\frac{5,0-4,3}{0,02} = 65$, altså ca. 8 ganger den akkumulerte formuen.

Hvis vi "glemmer" å ta hensyn til skattesatsen på renter, eller forutsetter at $B_P(t) = 0$ for alle t, blir den nødvendige offentlige formuen kraftig redusert til $\frac{5.0-4.3}{0.043} = 16.3$, altså ca. kun det dobbelte av akkumulert formue i 2050.

Dersom r settes så høyt som $10,0$ prosent, slik at $r^N - g_Z = 0.032$, får vi i stedet at den nødvendige offentlige formuen i 2050 må være $\frac{5,0-4,3}{0,032} = 21,9$, altså $2,7$ ganger akkumulert formue. Selv med en så høy rente teller altså utviklingen etter at vi har avsluttet modellberegningene mye tyngre enn den akkumulerte formuen ved overgangen til steady state.

5.6 Effekten av skatteøkning på nødvendig formue

Anta at det i et år er beregnet et Fiscal Gap, dvs. at nåverdien av utgiftene er høyere enn nåverdien av inntektene pluss den offentlig finansformue man har i dette året. Intuitivt vil man tro at en økning i en skattesats vil bidra til å redusere en slik ubalanse. I det følgende viser jeg at det ikke er opplagt, og det av en årsak som ikke har noe å gjøre med at skattesatsene initialt har pasert topppunktet på den relevante Lafferkurven.

For å få frem poenget uten for store formler, antar vi steady state slik at $g_C = g_X = g_Z$. (Her kan vi tenke på g_X som "ankeret" for steady-state vekstraten, fordi vekstraten for X er "mer eksogen" enn g_C og g_Z. g_X er bestemt av produktivitetsvekst og vekstraten for privat sysselsetting som følger av eksogen samlet sysselsetting og eksogen offentlig sysselsetting.) Innenfor den modellen vi har spesifisert foran, er den intertemporale offentlige budsjettbetingelsen på $t = 0$ sammenfallende med NPG-betingelsen gitt ved (82):

$$B_{O0} = \frac{(1-\tau) L_{O0}}{r(1-\tau) - g_O} - \frac{\tau (rB_{N0} + X_0)}{r(1-\tau) - g_Z} = f(\tau),$$

gitt at NPG-betingelsen holder for utenlandsformuen. Den nødvendige formuen på $t = 0$ er her skrevet som funksjon av skattesatsen τ som er en rundsum skatt fordi sysselsettingen er eksogent gitt. Vi tar med andre ord ikke hensyn til at økt skatt kan ha en negativ virkning på skattegrunnlaget. $W = A = P = 1$ er også uavhengig av τ siden skatten betales av konsumenten. Når $g_C = g_Z = g_X$, vil ikke steady-state vekstraten endres av et nivåskift i τ. Effekten av en marginal økning i τ på nødvendig formue blir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} &= \frac{\left(r^N - g_O\right)(-L_{O0}) - (1-\tau) L_{O0}(-r)}{\left(r^N - g_O\right)^2} \\
&\quad - \frac{\left(r^N - g_Z\right)(rB_{N0} + X_0) - \tau (rB_{N0} + X_0)(-r)}{\left(r^N - g_Z\right)^2} \\
&= -L_{O0}\frac{\left(r^N - g_O\right) - r^N}{\left(r^N - g_O\right)^2} + (rB_{N0} + X_0)\frac{-\left(r^N - g_Z\right) - \tau r}{\left(r^N - g_Z\right)^2} \\
&= \frac{g_O L_{O0}}{\left(r^N - g_O\right)^2} - \frac{(rB_{N0} + X_0)(r - g_Z)}{\left(r^N - g_Z\right)^2} \qquad (100)
\end{aligned}$$

med uklart fortegn. Nåverdien av utgiftene øker med $\frac{g_O L_{O0}}{\left(r^N - g_O\right)^2}$, mens nåverdien av inntektene øker med $\frac{(rB_{N0}+X_0)(r-g_Z)}{\left(r^N - g_Z\right)^2}$. Nåverdien av utgiftene øker fordi effekten av lavere diskonteringsrente dominerer effekten av høyere skatteinntekter fra offentlig ansatte. Nåverdien av offentlige inntekter øker fordi både skatteinntektene av et gitt skattegrunnlag øker, og fordi diskonteringsrenten faller.

Vi kan uttrykke forskjellen mellom skatteeffektene på de to nåverdiene ved å sette inn uttrykket for forskjellen *ex ante* skatteøkningen. Vi utnytter da at

$$\frac{\tau (rB_{N0} + X_0)}{r^N - g_Z} = \frac{(1-\tau) L_{O0}}{r^N - g_O} - f(\tau) \Leftrightarrow \frac{rB_{N0} + X_0}{r^N - g_Z} = \frac{\frac{(1-\tau)L_{O0}}{r^N - g_O} - f(\tau)}{\tau},$$

og får:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} &= \frac{g_O L_{O0}}{\left(r^N - g_O\right)^2} - \frac{(rB_{N0} + X_0)(r - g_Z)}{\left(r^N - g_Z\right)^2} \\
&= \frac{g_O L_{O0}}{\left(r^N - g_O\right)^2} - \left[\frac{(1-\tau) L_{O0}}{r^N - g_O} - f(\tau)\right]\frac{(r - g_Z)}{\tau\left(r^N - g_Z\right)} \\
&= \frac{L_{O0}}{\left(r^N - g_O\right)}\left[\frac{g_O}{\left(r^N - g_O\right)} - \frac{(1-\tau)(r - g_Z)}{\tau\left(r^N - g_Z\right)}\right] + f(\tau)\frac{(r - g_Z)}{\tau\left(r^N - g_Z\right)}. \qquad (101)
\end{aligned}$$

Klammeparentesen kan alternativt skrives

$$\frac{g_O}{\left(r^N - g_O\right)} - \frac{(1-\tau)(r - g_Z)}{\tau\left(r^N - g_Z\right)} = \frac{g_O(1+\tau) + (1-\tau) g_Z - g_Z g_O - r^N}{1 - g_O\tau + \frac{g_O g_Z}{r^N}}, \qquad (102)$$

men heller ikke denne omformuleringen gjør det mulig teoretisk å bestemme fortegnet på virkningen av skatteøkningen på nåverdien av utgifter minus nåverdien av inntekter for det offentlige.

Følgende faktorer bidrar til at nåverdiunderksuddet $f(\tau)$ øker med økt τ:

1. Et initialt nåverdiunderskudd, dvs. $f(\tau) > 0$, blåses ytterligere opp av leddet $\frac{(r-g_Z)}{\tau(r^N-g_Z)} > \frac{1}{\tau} > 1$.
2. Jo større g_O er i forhold til g_Z, (gitt $r > g_O$), desto større er $\frac{g_O}{(r^N-g_O)} - \frac{(1-\tau)(r-g_Z)}{\tau(r^N-g_Z)}$.

Det løpende primære offentlige budsjettoverskuddet, $D = \tau r B_{N0} e^{g_Z t} + \tau X - (1-\tau) L_O$, avhenger av τ som følger:

$$\frac{\partial D(\tau)}{\partial \tau} = r B_{N0} e^{g_Z t} + X + L_O > 0 \tag{103}$$

så sant utenlandsgjelden ikke er "for" stor.

Vi har dermed klarlagt at forskjellen mellom nåverdien av offentlige utgifter og nåverdien av offentlige inntekter kan øke når man øker skattesatsen. Dette til tross for at det løpende primære offentlige budsjettunderskuddet reduseres når skattesatsen øker. Dette resultatet er oppnådd uten at det er tatt hensyn til en evt. negativ sammenheng mellom skattesats og arbeidstilbud. En viktig forutsetning bak dette resultatet er at den skattesatsen som endres, også er lagt på renteinntekter.

La oss til slutt betrakte et spesialtilfellet der vi antar at vi *ex ante* skatteøkningen har nåverdibalanse, og $g_Z = g_O = g$. $\frac{\partial f}{\partial \tau}$ forenkler seg da til

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{L_{O0}}{(r^N-g)^2}\left[g - \frac{(1-\tau)(r-g)}{\tau}\right] \tag{104}$$

$$= \frac{L_{O0}}{(r^N-g)^2}\frac{\tau g - r^N + g - \tau g}{\tau} = -\frac{L_{O0}}{\tau(r^N-g)} < 0. \tag{105}$$

I dette spesialtilfellet vil altså skatteøkningen redusere nivået på den nødvendige offentlige formuen.

6 Optimal kapitaltilpasning uten bruk av Pontryagins maksimumsprinsipp

Både bedrifter og husholdninger kjøper kapitalvarer som har en levetid utover den perioden hvor de kjøpes. Vanligvis bruker man optimal kontrollteori, basert på Pontryagins maksimumsprinsipp, for å utlede etterspørselsrelasjoner for kapitalvarer. I det følgende viser jeg at disse etterspørselsrelasjonene kan utledes uten at man baserer seg på denne teorien. Metoden som presenteres er selvsagt ikke riktigere enn bruk av optimal kontrollteori. Poenget er at den får frem betydningen av transversalitetsbetingelsen knyttet til dette problemet på en klar måte.

Vi ser på det enkleste standardtilfellet der en bedrift maksimerer nåverdien av kontantstrømmen til eierne. Vi lar tiden være en kontinuerlig variabel for å få mest mulig kompakte analytiske uttrykk. På ethvert tidspunkt t er bedriftens profitt gitt ved profittfunksjonen $\pi\left(K\left(t\right)\right)$ som er fremkommet ved at bedriften har maksimert profitten som prisfast kvantumstilpasser mhp. alle andre innsatsfaktorer enn kapitalbeholdningen K. Vi forutsetter at $\pi'\left(K\right)=\frac{\partial\pi(K)}{\partial K}>0$ og $\pi''\left(K\right)<0$. En andel δ av kapitalen slites vekk pr. tidsenhet. La $q\left(t\right)$, $J\left(t\right)$ og r være henholdsvis prisen på kapitalvarer, bruttoinvesteringene og rentesatsen. Vi antar at r er konstant og ser bort fra beskatning for å forenkle formlene. Tilfellet med beskatning har jeg studert i avsnitt 5.1.2 i Bye, Holmøy og Strøm (1999). Vi undertrykker tidsvariabelen i det følgende. Produsenten skal maksimere nåverdien av bedriftens kontantstrøm gitt ved

$$V\left(0\right)=\int_0^\infty e^{-rt}\left[\pi\left(K\right)-qJ\right]dt \tag{106}$$

mhp. J, gitt sammenhengen mellom kapitalbeholdning og investering

$$\dot{K}=J-\delta K, \tag{107}$$

og $K\left(0\right)$ er predeterminert lik K_0. I stedet for å bruke Pontryagins maksimumsprinsipp løser vi maksimeringsproblemet ved gjelp av av delvis integrasjon. Først setter vi (107) inn i (106):

$$V\left(0\right)=\int_0^\infty e^{-rt}\left[\pi\left(K\right)-q\left(\dot{K}+\delta K\right)\right]dt. \tag{108}$$

Ved delvis integrasjon kan vi eliminere leddet som inneholder $\dot{K}$. Vi har nemlig

$$\int_0^\infty e^{-rt}q\dot{K}dt=\lim_{t\to\infty}e^{-rt}qK-q_0K_0-\int_0^\infty\left[\left(-r\right)e^{-rt}q+e^{-rt}\dot{q}\right]Kdt. \tag{109}$$

For at $V\left(0\right)$ skal ha noe maksimum. må integralet i (109) konvergere. Betingelsen for konvergens er er at

$$\lim_{t\to\infty}e^{-rt}qK=0, \tag{110}$$

som er den såkalte transversalitetsbetingelsen knyttet til maksimeringsproblemet. Når dette løses med optimal kontrollteori, forutsettes denne betingelsen å gjelde uten rasjonalisering. I fremstillingen over tvinges man til eksplisitt å gjøre denne forutsetningen for å sikre at maksimeringsproblemet skal ha en løsning.

Gitt at (110) holder, gir innsetting av (109) i (108):

$$\begin{aligned} V(0) &= \int_0^\infty e^{-rt}\left[\pi(K) - q\dot{K} - q\delta K\right] dt \\ &= q_0 K_0 + \int_0^\infty e^{-rt}\left[\pi(K) - \left(r + \delta - \frac{\dot{q}}{q}\right) qK\right] dt. \end{aligned} \tag{111}$$

der $\left(r + \delta - \frac{\dot{q}}{q}\right) q \equiv c$ er brukerprisen på kapital. $V(0)$ når sitt maksimum mhp. K når

$$\pi'(K) = c \tag{112}$$

på ethvert tidspunkt, hvilket svarer til løpende profittmaksimering med c som den relevante prisen på kapitaltjenester. Når den underliggende produktfunksjonen har konstant skalautbytte, vil profittfunksjonen være proporsjonal med K, dvs. $\pi(K) = \alpha K$, der $\alpha = \pi'(K)$ er en konstant som avhenger av eksogene produktivitetsfaktorer, priser på produktet og variable innsatsfaktorer. Under fullkommen konkurranse vil de variable som er eksogene for produsenten, men endogene i økonomien, ha innstilt seg slik at $\alpha = c$, og maksimal profitt er 0. Fra (111) følger det da at bedriftenes maksimale verdi blir

$$V_0 = q_0 K_0, \tag{113}$$

dvs. markedsverdien av den initiale kapitalbeholdningen. Dersom produktfunksjonen har avtakende skalautbytte, vil grunnrente føre til at maksimert $V(0) > q_0 K_0$.

7 Referanser

Blanchard, O. (1985): Debt, deficits, and finite horizons, *Journal of Political Economy* **93**, 2, 223-247.

Bye, B. og E. Holmøy (1997): Household behaviour in the MSG6 model, Documents 97/13, Statistisk sentralbyrå.

Bye, B., E. Holmøy og B. Strøm (1999): Virkningerpå samfunnsøkonomisk effektivitet av en flat skattereform: Betydningen av generelle likevektseffekter, *Rapporter* 99/26, Statistisk sentralbyrå.

Heide, K. M., E. Holmøy, I. F. Solli og B. Strøm (2006): A Welfare State Funded by Nature and OPEC: A guided tour on Norway's path from an exceptionally impressive to an exceptionally strained fiscal position. Discussion Paper 464, Statistisk sentralbyrå.

Holmøy, E. (2006): "Fiscal sustainability: Must the problem be diminished before we can see it?", Manuskript, Statistisk sentralbyrå.

Mankiw, N. G. (2000): The savers-spenders theory fiscal policy, *American Economic Review* **90** (2), 120-125.

St. meld. nr. 8 (2004-2005) Perspektivmeldingen 2004 - utfordringer og valgmuligheter for norsk økonomi, Finansdepartementet.

De sist utgitte publikasjonene i serien Notater

2006/38 A.Vedø og L. Solheim: En praktisk innføring i utvalgsplanlegging. 40s.

2006/39 H.C. Hougen: Samordnet levekårsundersøkelse 2005 - tverrsnittsundersøkelsen. Dokumentasjonsrapport. 156s.

2006/40 T. Nøtnæs, S. Bytingsvik og B. Hole: Resultater fra brukertesting av ssb.no. 34s.

2006/41 KOSTRA. Arbeidsgrupperapporter 2006. 169s.

2006/42 T. Gulbrandsen: Levekårsundersøkelse blant studenter. Dokumentasjonsrapport. 66s.

2006/43 A-G. Jørstad: Overvåkingssystemet for bedrifter i Bof. 19s.

2006/44 M. Høstmark og B.O. Lagerstrøm: Undersøkelse om Arbeidsmiljø: Destruktiv atferd i arbeidslivet. Dokumentasjonsrapport. 43s.

2006/45 T.K. Schjerven og K.Å. Wass: Faglig modell og rammeverk i StatRes. 67s.

2006/46 R. Sønsterudbråten: FOB2001. Dokumentasjon av logistikk og svartjeneste. 68s.

2006/47 K. Henriksen: Utvalgsplan til konsumprisindeksens nye matvareindeks - Basert på strekkodedata. 23s.

2006/48 A.B. Thorud, D. Rafat, S. Ferstad og E. Vinju: Tverrgående revisjon i KOSTRA - Bedring av påliteligheten i nøkkeltallene. 65s.

2006/49 T. Granseth: Grensehandel. En analyse av kvaliteten av data. 48s.

2006/50 E. Engelien, H. Høie og M. Steinnes: Bygging i strandsona. Metode og resultater. 18s.

2006/51 A. Akselsen, K.I. Bøe og Ø. Sivertstøl: FD - Trygd. Dokumentasjonsrapport. Arbeidssøkere, 1.1.1992-30.4.2001. 75s.

2006/52 L. Østby: Bruk av velferdsordninger blant nyankomne innvandrere fra de nye EØS-landene i 2005. 34s.

2006/53 G. Claus: Inntekts- og formuesundersøkelsen for personlig næringsdrivende 2004. Dokumentasjon. 28s.

2006/54 J. Heldal: Logistisk regresjon - kurskompendium i byråskolens kurs SM507. 51s.

2006/55 L.H. Thingstad: Varehandelsstatistikk 2002 - omsetning etter varegruppe. 59s.

2006/56 H.Kull Brofoss og A. Barstad: Internasjonale erfaringer med områderettede tiltak i storbyer. En litteraturstudie. 101s.

2006/57 B. Bye og I. Ringdal: Disaggregering av helse-, omsorg- og utdanningstjenester i MSG6-modellen. 39s.

2006/59 Leiemarkedsundersøkelsen 2006. Dokumentasjonsrapport. 43s.

2006/60 J. Hamre og A. Vedø: Utvalgsundersøkelse om egenmeldt sykefravær. Dokumentasjon av utvalgsplanen, utvalget for 2006 og standardfeilberegninger. 50 s.

2006/61 E. C. Rauan: Undersøking om foreldrebetaling i barnehagar, august 2006. 45s.

2006/62 Indikatorer på kjemikalieområdet - Risiko for skade på helse og miljø grunnet bruk av kjemiske stoffer, fase 2. 100s.

2006/63. Lønnsstatistikk 2006. Etablering av populasjon og utvalg. Dokumentasjonsnotat. 51s.

2006/65: O. Villund: Forsøk med imputering av utførte timeverk i Arbeidskraftundersøkelsen. 58 s.

2006/67: E. Holmøy: Non-Ponzi-Game betingelser og lukking av anvendte intertemporale likevektsmodeller. 38s.