

RAPPORTER

80/32

**GLATTING AV FLYTTERATER
I STATISTISK SENTRALBYRÅS
BEFOLKNINGSFRAMSKRIVINGER**

AV
KNUT Ø. SØRENSEN

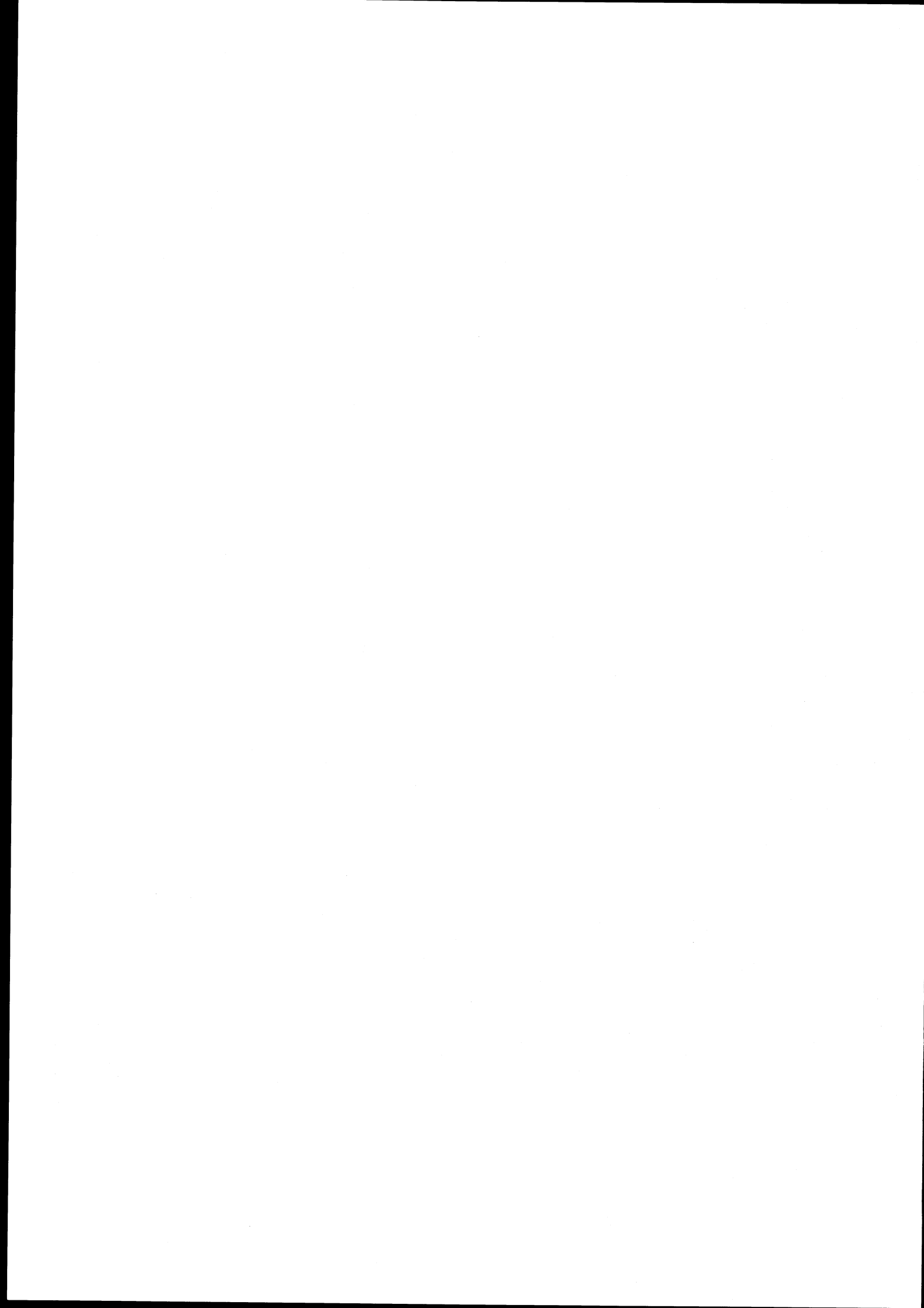
STATISTISK SENTRALBYRÅ
OSLO

RAPPORTER FRA STATISTISK SENTRALBYRÅ 80/32

**GLATTING AV FLYTTERATER
I STATISTISK SENTRALBYRÅS
BEFOLKNINGSFRAMSKRIVINGER**

AV
KNUT Ø. SØRENSEN

OSLO 1980
ISBN 82-537-1216-2
ISSN 0332-8422

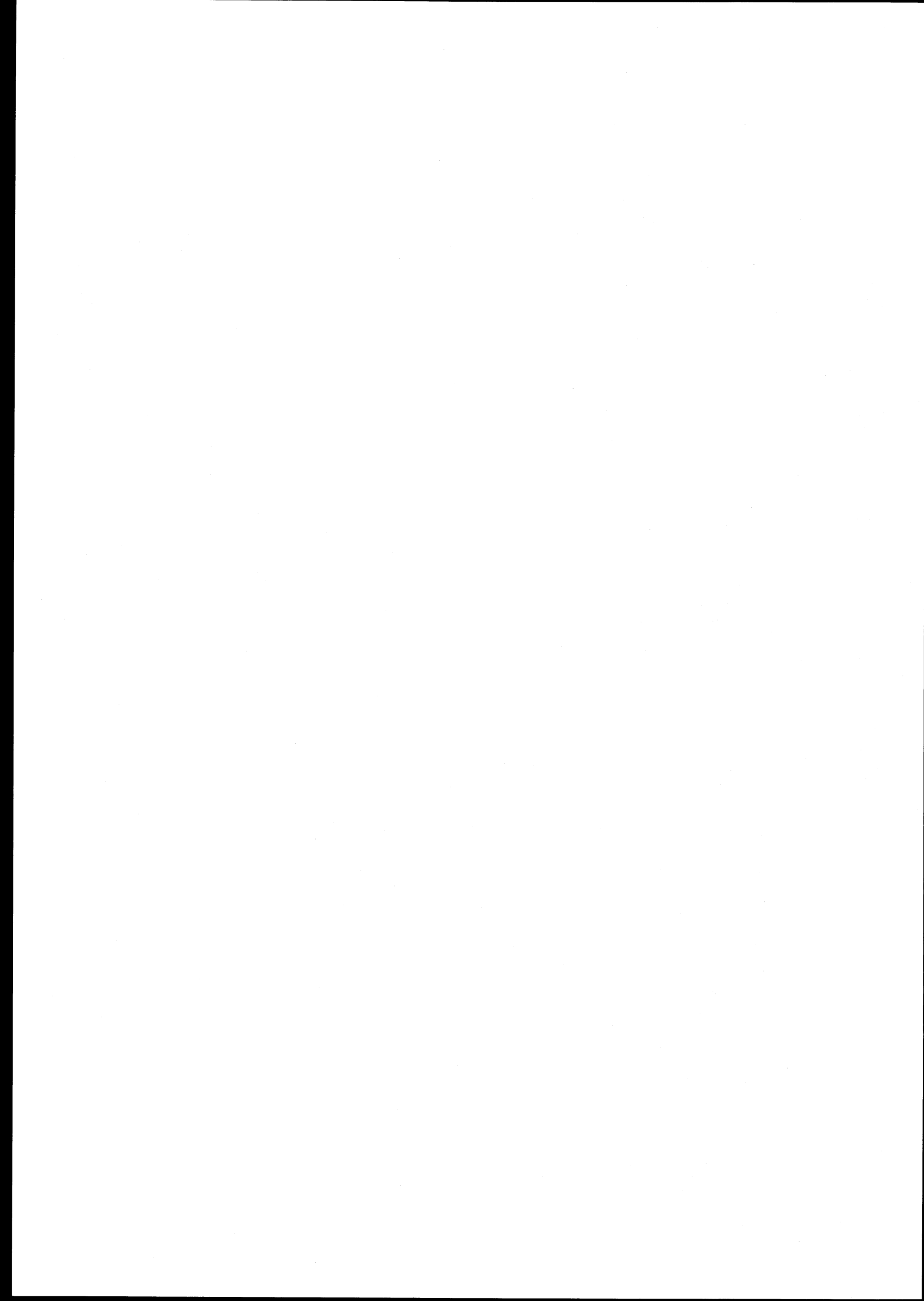


FORORD

Denne rapporten dokumenterer den glattingen av flytteratene som ble foretatt i befolkningsframskrivingen 1979.

Statistisk Sentralbyrå, Oslo, 16. desember 1980

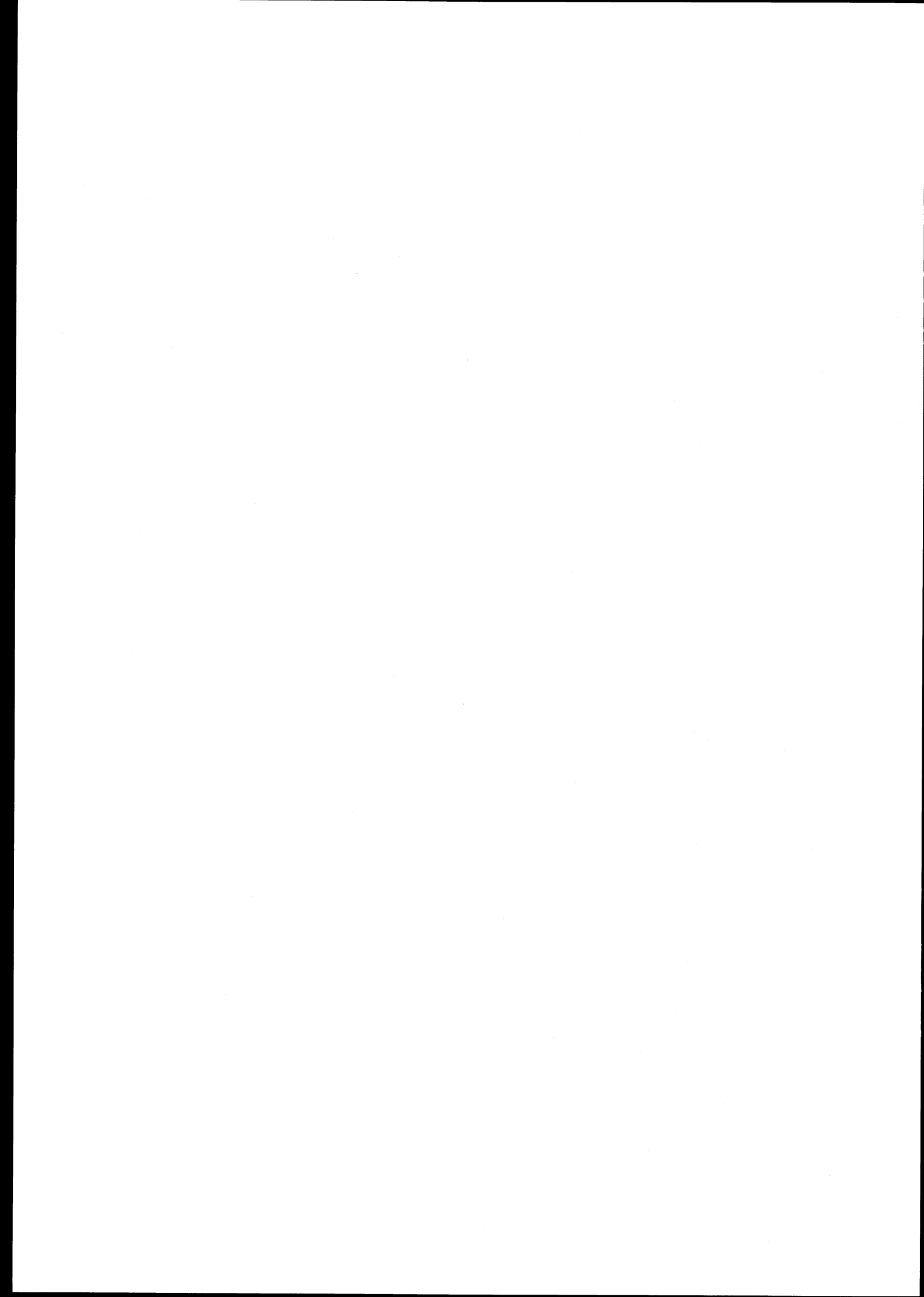
Arne Øien



INNHold ¹⁾

	Side
Figurregister	7
1. Innledning	8
2. Om flytteratenes variasjon med alder	8
3. Beskrivelse av glattingsmetoder	10
4. Noen trekk ved resultatene	11
5. Oppsummering og vurdering	20
6. Mulige forbedringer	20
Litteratur	22
Vedlegg: Dokumentasjon og utledning av beregningsformel	23
Utkommet i serien Rapporter fra Statistisk Sentralbyrå (RAPP)	26

1) Jeg vil takke John Dagsvik og medlemmene av støtgruppen for befolkningsframskrivingen for råd og veiledning. Jan M. Hoem har gitt en rekke detaljerte kommentarer og forslag til videre utvikling av glattingsarbeidet.



FIGURREGISTER

	Side
Fig. 1: Flytterater for p.p.-region 74, Sandefjord, etter kjønn og alder 1971-1974. Prosent.	9
Fig. 2: Flytterater for region 021, Oslo og Akershus. Menn 1975-1978 .	12
Fig. 3: Flytterater for region 021, Oslo og Akershus. Kvinner 1975-1978	12
Fig. 4: Flytterater for region 066, Rollag, Nore og Uvdal, Menn 1975-1978	13
Fig. 5: Flytterater for region 066, Rollag, Nore og Uvdal, Kvinner 1975-1978	13
Fig. 6: Flytterater for region 116, Finnøy, Rennesøy og Kvitsøy, Menn. 1975-1978	14
Fig. 7: Flytterater for region 116, Finnøy, Rennesøy og Kvitsøy, Kvinner. 1975-1978	14
Fig. 8: Flytterater for region 116, Finnøy, Rennesøy og Kvitsøy, Kvinner. 1973-1976	15
Fig. 9: Flytterater for region 173, Lierne, Røyrvik, Namsskogan, Grong, Menn. 1975-1978	17
Fig. 10: Flytterater for region 173, Lierne, Røyrvik, Namsskogan, Grong, Kvinner. 1975-1978	17
Fig. 11: Flytterater for region 173, Lierne, Røyrvik, Namsskogan, Grong, Kvinner. 1973-1976	18
Fig. 12: Flytterater for region 011, Halden og Aremark, Menn. 1975-1978	19
Fig. 13: Flytterater for region 011, Halden og Aremark, Kvinner. 1975-1978	19

1. INNLEDNING

Til bruk i befolkningsframskrivingen ble tidligere utflyttingsrater og innflyttingsandeler beregnet for hvert kjønn og for hver ettårige aldersklasse for seg. Selv om ratene beregnes på p.p.-regionnivå¹⁾ og for en periode på fire år under ett, blir dette beregningsgrunnlaget i mange tilfeller for lite. Den minste p.p.-regionen, Rollag og Nore og Uvdal kommuner, hadde 4 342 innbyggere pr. 31/12 1976. I 1977 ble antallet flyttere over p.p.-regiongrensen beregnet til 113 utflyttere og 146 innflyttere (beregnet i framskrivingen 1977, alternativ H 1). Med så små tall vil flytteratene bli sterkt påvirket av tilfeldigheter. Tegnet opp i et diagram vil ratene for enkeltaldre sprette opp og ned, mens en rimelig hypotese kan være at den "underliggende" kurven egentlig er glatt og "pen", og at sprettene skyldes tilfeldigheter. Det er derfor nærliggende å glatte kurvene for utflyttingsrater og innflyttingsandeler. En viss glatting er gjennomført for de andre ratene som brukes i framskrivingsberegningene.

Dette notatet er ment som en dokumentasjon av arbeidet med å glatte flytteratene til framskrivingen 1979. Glattingmetoden ble tatt i bruk for (brutto-)utflyttingens del. Det ble ikke tid til å ta opp glatting av innflyttingsandelene.

2. OM FLYTTERATENES VARIASJON MED ALDER

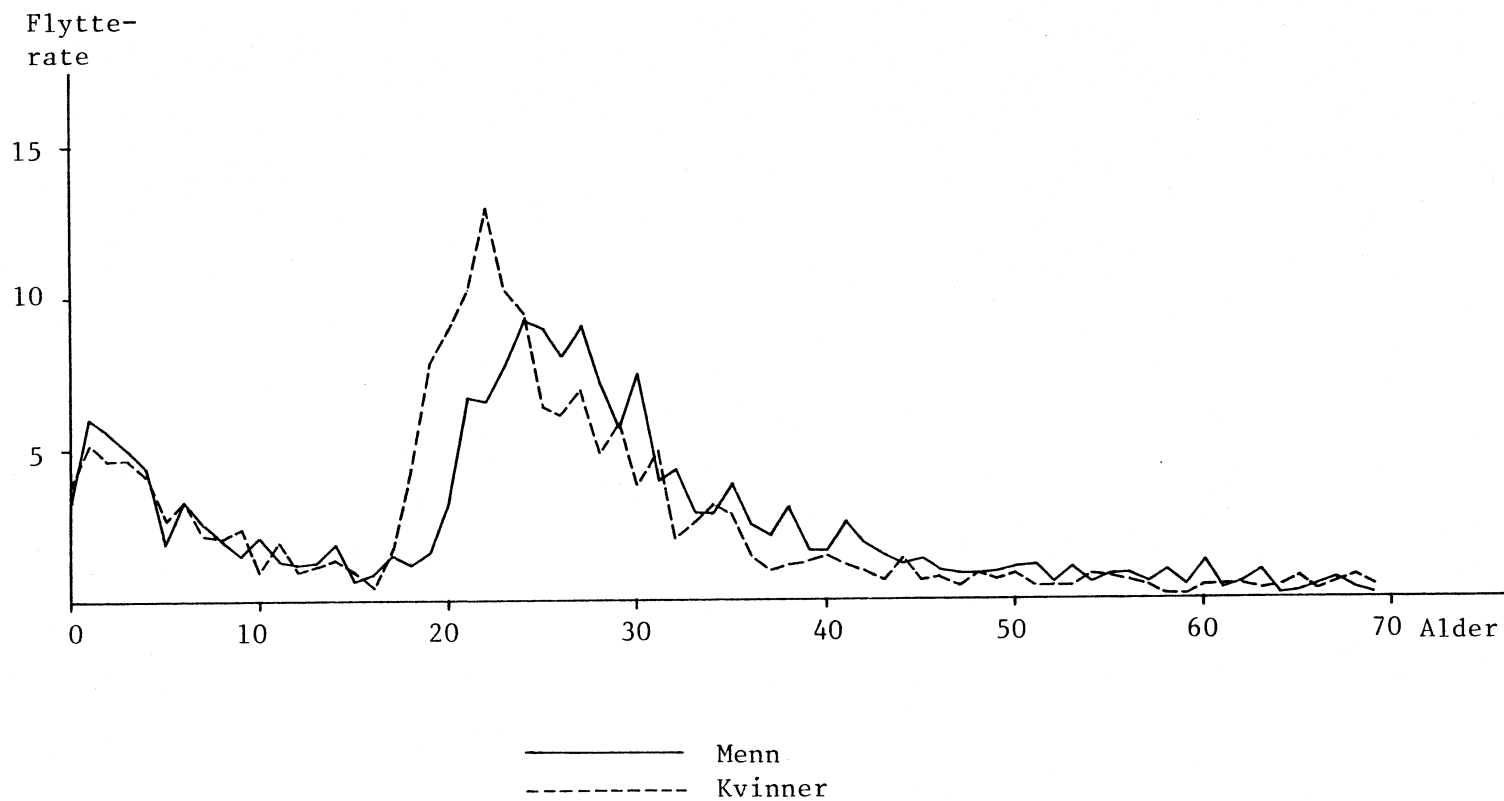
Kurver med flytterater etter alder har gjerne visse karakteristiske trekk som går igjen i de fleste regioner og perioder. Disse trekkene kan sees både i Norge og i andre land med statistikk over brutto-flyttinger.

Vi har tegnet opp en slik kurve i figur 1. Ratene her er hentet fra rategrunnlaget for Byråets framskrivinger 1975-2000. Observasjonsperioden dekker årene 1971-74. Regional enhet er "primær prognoseregion (p.p.-region)". Som flyttere er regnet alle som flyttet ut av p.p.-regionen i et gitt kalenderår, og som ikke flyttet tilbake i det samme året.

Nullåringer har lave flytterater i forhold til de andre yngste aldersgruppene. Dette henger sammen med den aldersdefinisjonen som brukes i framskrivingen. Alder regnes der som differansen mellom kalenderår og fødselsår,

1) P.p.-region = primær prognoseregion er regional enhet i første trinn av Byråets regionale befolkningsframskriving. Regionene (96 i alt) er definert i Sørensen (1976) eller Rideng (1974).

Figur 1. Flyttester for p.p.-region 74¹⁾ (Sandefjord) etter kjønn og alder 1971-1974. Prosent.



1) Antall innbyggere pr. 31/12 1978: 34 405
Antall utflyttere 1978: Menn: 479
Kvinner: 477

dvs. som alder i fylte år ved utgangen av året. Null år er man da i (resten av) det kalenderåret en er født. Nullåringene har altså gjennomsnittlig bare hatt ca. et halvt års tid å flytte på.

Karakteristisk for kurvene er at de har et toppunkt i 20-årsalderen. Dette toppunktet kommer tidligere for kvinner enn for menn, og er som regel også spissere og ofte høyere, for kvinnene. Denne alderen er for de fleste en etableringsfase såvel på arbeidsmarkedet som på boligmarkedet. Etter hvert som familiene blir mer etablerte faller de fleste mer til ro, og mobiliteten avtar.

Barna flytter sammen med sine foreldre. Dette er bakgrunnen for parallelliteten i ratekurven for barna fram til tenårene og ratekurven for de voksne fra slutten av 20-årsalderen til 40-årsalderen. Det er også grunnen til at flytteratene for gutter opp til 12-14 årsalderen stort sett er like store som flytteratene for jenter.

Mobiliteten for personer i 50-årsalderen og over er stort sett lav. I framskrivingene ser vi bort fra flytting for personer i alderen 70 år og over.

3. BESKRIVELSE AV GLATTINGSMETODEN

Det er ikke lett å finne noen enkel funksjonsform a priori som føyer seg til ratene i fig. 1. Vi har derfor valgt å glatte kurvene med splines-funksjoner. En detaljert beskrivelse av metoden er gitt i vedlegget. Her vil vi gjengi noen hovedpunkter:

- i) Før glattingen med splines-funksjonen er ratene for barna i alderen 0-15 år preglattet ved å forutsette felles rater for jenter og gutter. Også for personer over 50 år er ratene beregnet for begge kjønn under ett.
- ii) Aldersintervallet 0-69 år ble delt inn i 5 delintervaller med ett delepunkt i 15-16 årsalderen,¹⁾ ett i 20-årsalderen,²⁾ og ett i hver av aldrene 34 og 49 år.
- iii) I hvert delintervall ble det føyet et tredjegradspolynom, slik at kurvene med flytterater var kontinuerlige i hvert delepunkt. I delepunktene 34 år og 49 år har ratekurven (splines-funksjonen) dessuten kontinuerlige deriverte av 1. og 2. orden. I delepunktet i 15-16 årsalderen er den 1. deriverte av splinesfunksjonen kontinuerlig.³⁾

1) Den av aldrene 15 og 16 år der flytteraten var lavest.

2) Den av aldrene fra og med 20 til og med 28 år der flytteraten var høyest.

3) Ideen til modifikasjon av standard splinesfunksjonen er hentet fra Suits et. al (1977).

Splines-funksjonen er altså av vanlig, standard type, med den modifikasjonen at det er lagt inn et knekkpunkt i toppunktet i 20-årene, og et knekkpunkt i den 1. deriverte i bunnpunktet i 15-16 årsalderen.

4. NOEN TREKK VED RESULTATENE

Vi har valgt å presentere resultatene ved å tegne opp noen få eksempler på flytterater før og etter glatting.

Det er vanskelig å gi noe godt kriterium for å bedømme resultatene. Den største regionen, som består av de to fylkene Oslo og Akershus, er imidlertid så stor, at flytteratene ikke skulle påvirkes nevneverdig av tilfeldig "støy". Det synes da rimelig å kreve at kurven med de glattete ratene faller nærmest mulig kurven med "rårater".

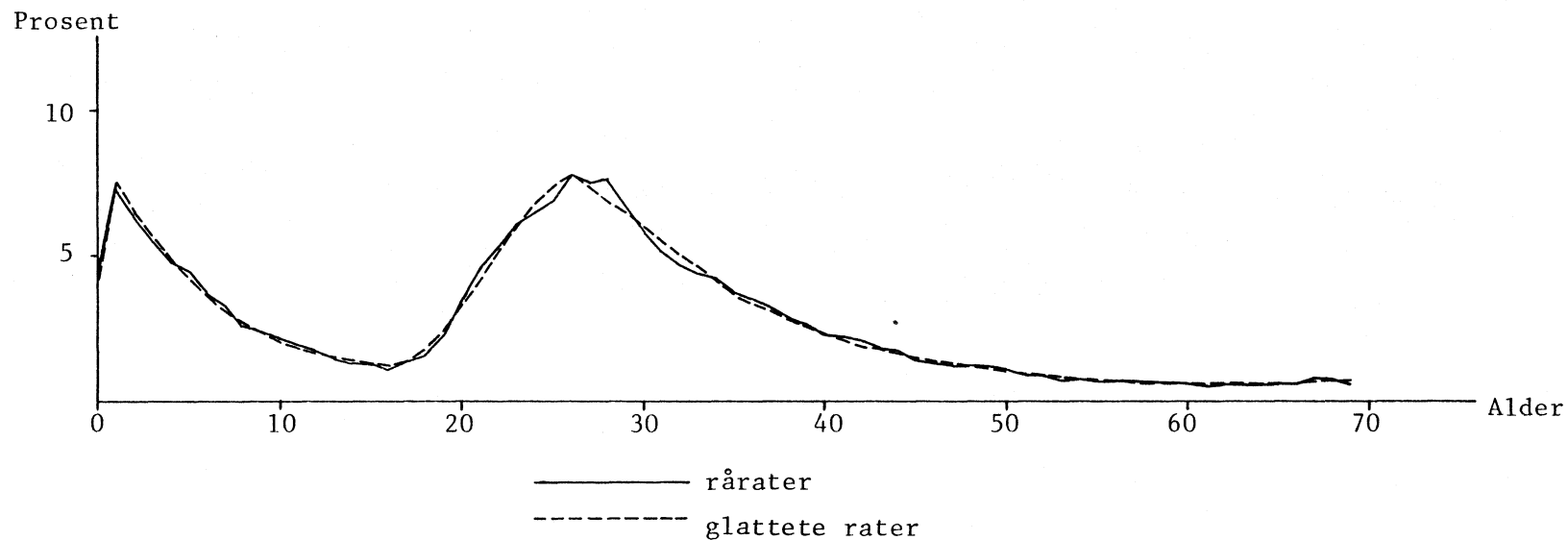
I figur 2 og 3 er ratene for Oslo og Akershus (region 021) tegnet opp. Samsvaret mellom kurvene med rårater og glattete rater er tilfredsstillende, men ikke helt perfekt.

Det er først og fremst de små regionene der rategrunnlaget kan forbedres ved glatting. For de små regionene er selvfølgelig også hovedhensynet at de glattete ratene skal gi et rimelig uttrykk for "flyttemønstret" i perioden. Valget mellom ulike metoder, som alle stort sett gir rimelige resultater, blir imidlertid skjønnspreget. Splinesfunksjonene er såpass fleksible, at en variant som gir bedre føyning til data for små områder, målt med f.eks. vanlige kji-kvadratmål, risikerer å føye seg etter ujevnheter. I grensetilfellet, med perfekt føyning etter data, blir jo vitsen med glattingen borte.

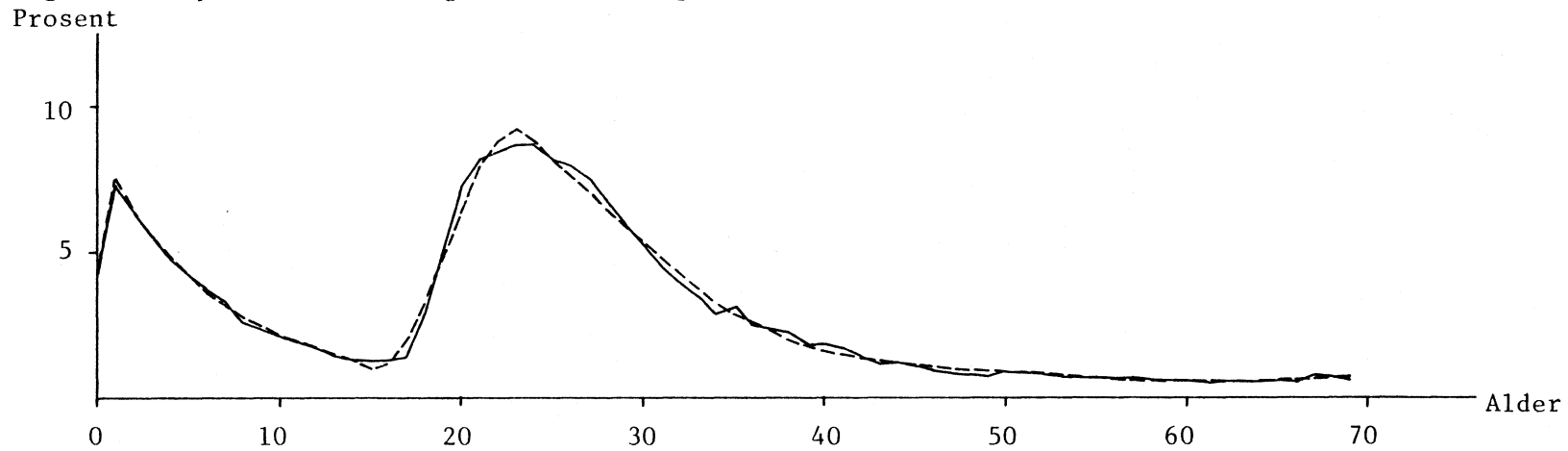
Figur 4 og 5 viser rå og glattete rater for den regionen som har minst innbyggertall. (Råratene er pre-glatttet.) Regionen består av kommunene Rollag og Nore og Uvdal. De glattete ratene ble brukt i befolkningsframskrivingene 1979. De glattete kurvene virker vel ikke urimelige som uttrykk for det "underliggende" flyttemønstret.

Figurene 6, 7 og 8 viser flytterater for øykommunene Finnøy, Rennesøy og Kvitsøy. Dette er små utkantkommuner med stor brutto-utflytting. For kvinners del var bruttoflyttingen i 1973-76 (fig. 8) på nesten 35 prosent for en av aldrene. Det er nok en fordel at glattingen har dempet den toppen noe. I figur 7 er ratene for den delvis overlappende fireårsperioden 1975-1978 tegnet i samme målestokk. Selv om flytteratene var omtrent de samme for 19- og 20-åringer i de to periodene, hadde ratene for 17-18 åringer og 21-23 åringer falt betydelig. Dette avspeiles også i de glattete ratene.

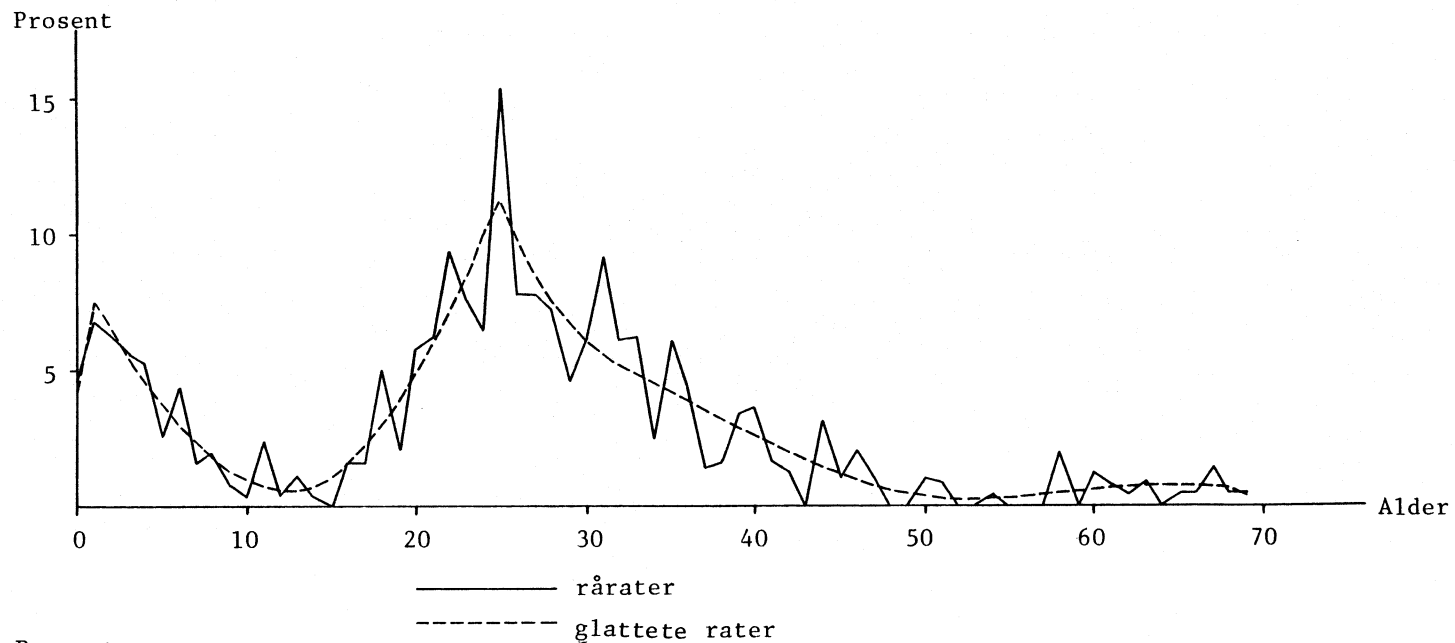
Figur 2. Flytterater for region 021 Oslo og Akershus. Menn 1975-1978



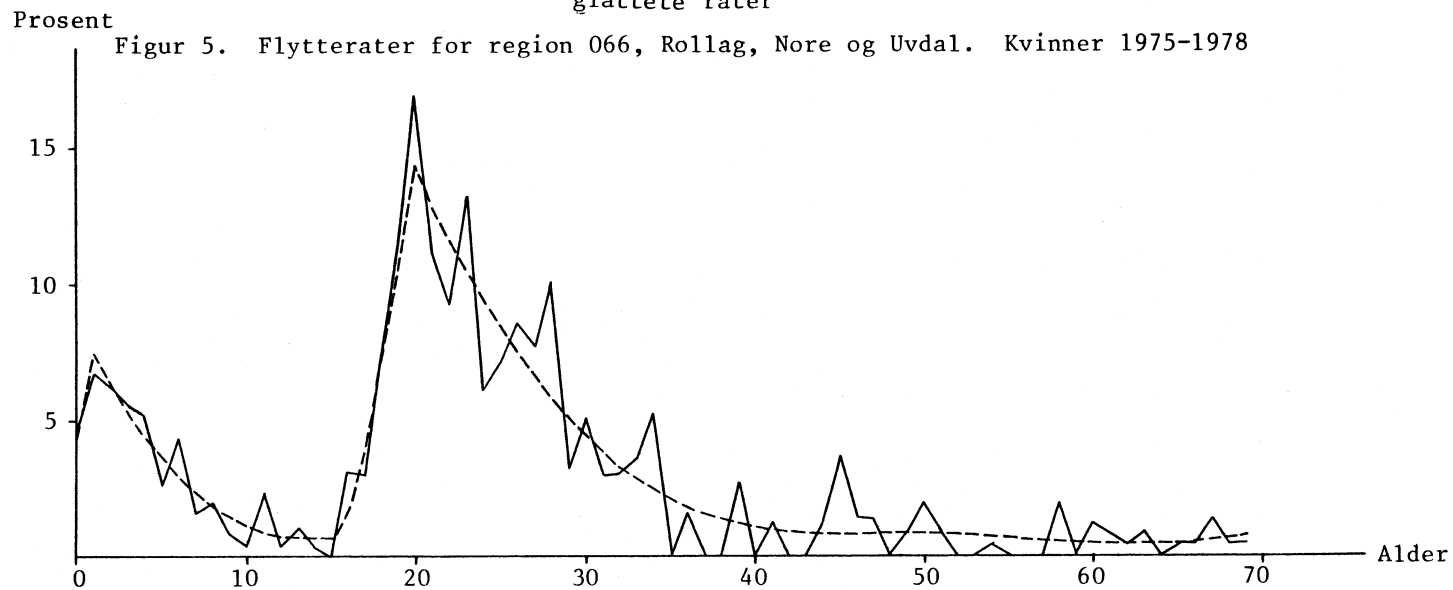
Figur 3. Flytterater for region 021 Oslo og Akershus. Kvinner 1975-1978



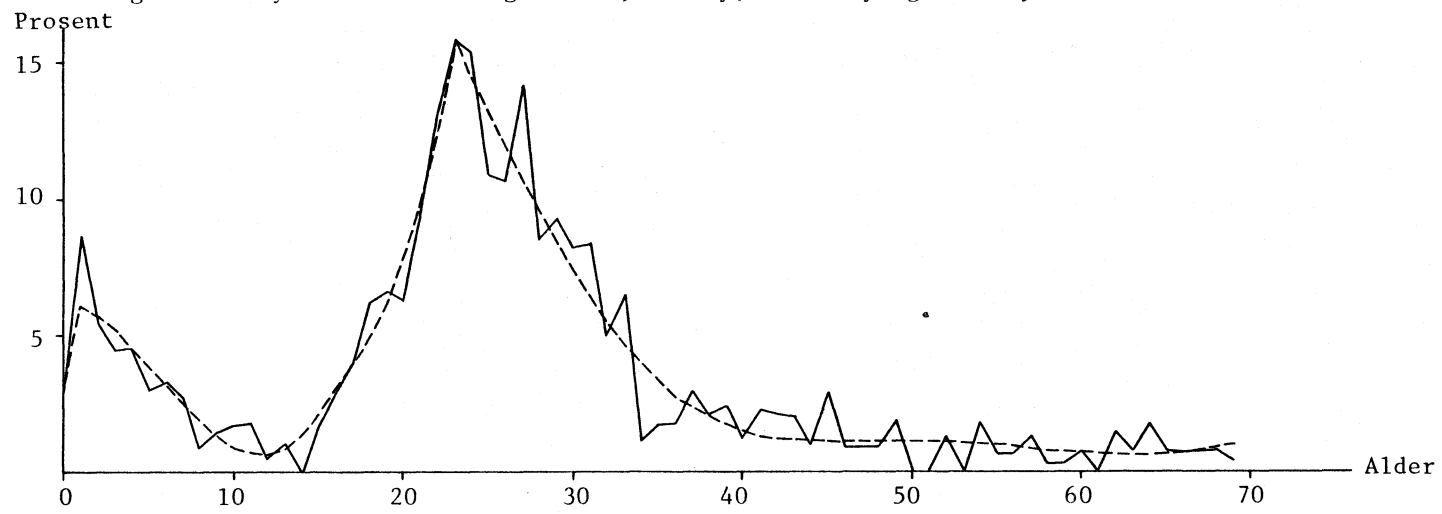
Figur 4. Flytterater for region 066, Rollag, Nore og Uvdal. Menn 1975-1978



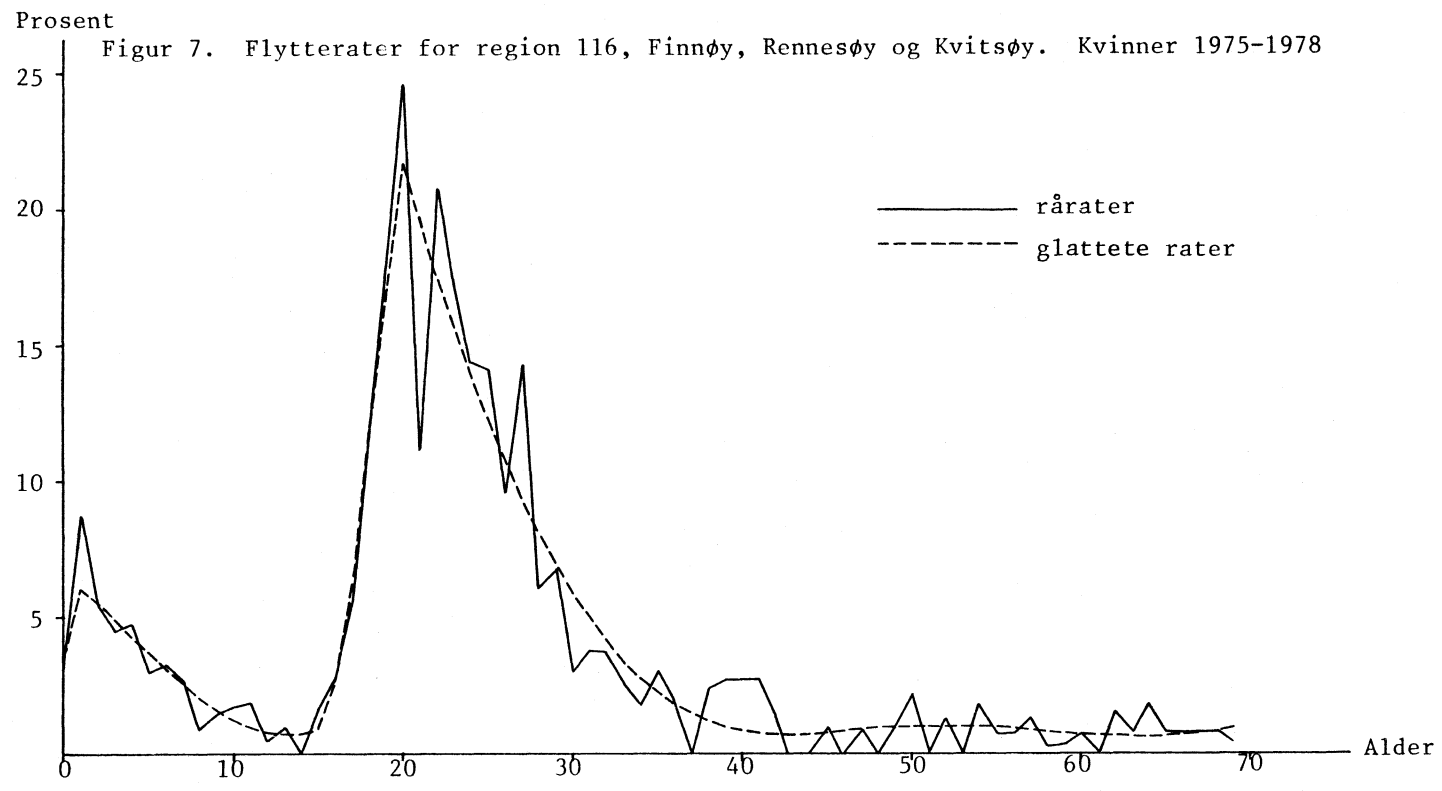
Figur 5. Flytterater for region 066, Rollag, Nore og Uvdal. Kvinner 1975-1978



Figur 6. Flytterater for region 116, Finnøy, Rennesøy og Kvitsøy. Menn 1975-1978

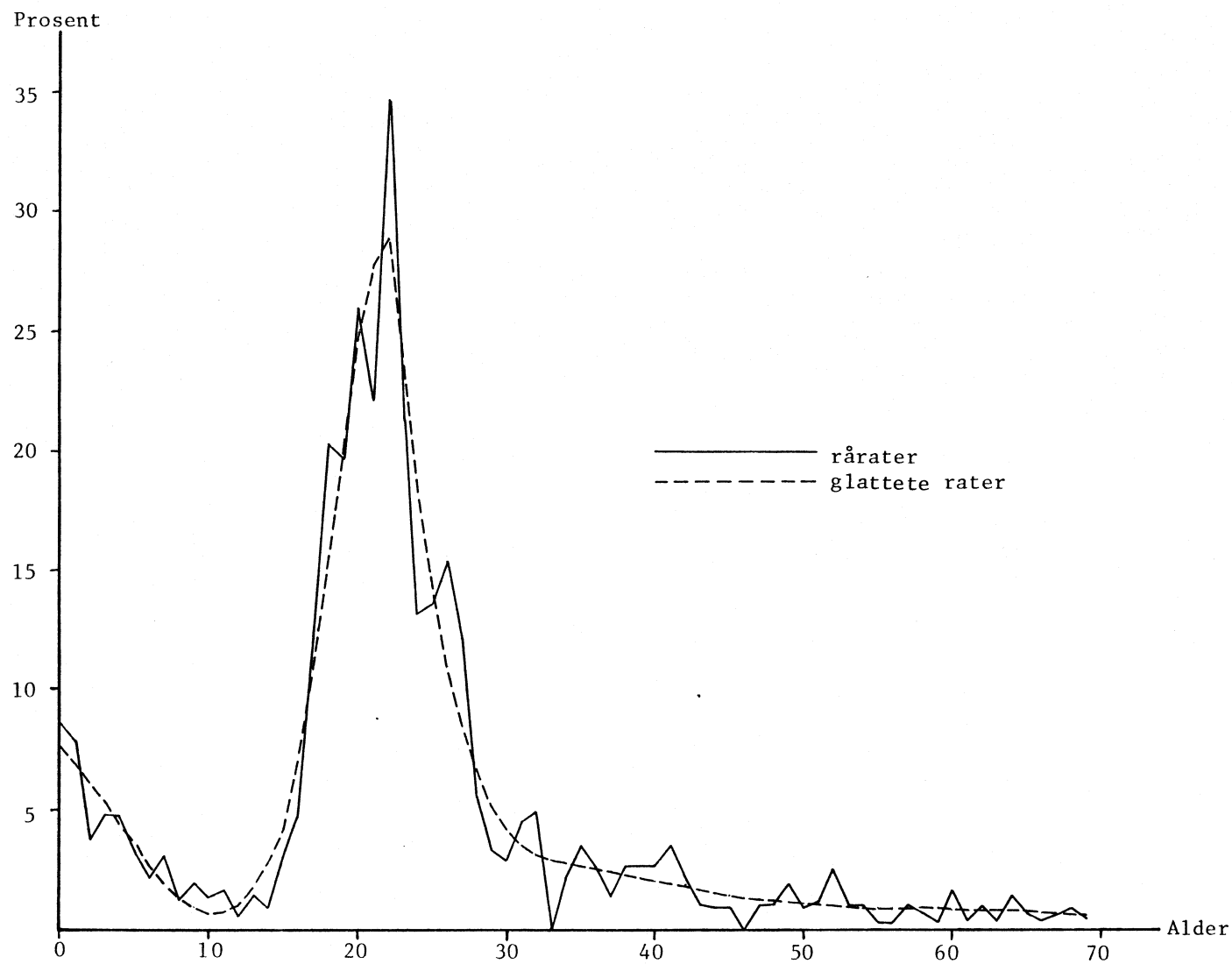


Figur 7. Flytterater for region 116, Finnøy, Rennesøy og Kvitsøy. Kvinner 1975-1978



Figur 8. Flytterater¹⁾ for region 116. Kvinner, 1973-1976

15



1) Ratene for nullåringer er her fordoblet.

Ved glatting med splines-funksjonen, og også ved andre analytiske funksjoner, vil forløpet av den glatte kurven i et delintervall bestemmes ikke bare av observasjonene i dette intervallet, men også av de andre observasjonene. Til tross for at flytteratene i aldre under 15 og over 24 år stort sett hadde samme nivå i de to periodene, er de glattete kurvene forskjellige som følge av de store endringene i flytteratene for aldre 15-24 år.

Figurene 9, 10 og 11 gir flytterater for kommunene Lierne, Røyrvik, Namsskogan og Grong. Også dette er spredtbygde utkantkommuner med relativt sterk brutto-utflytting av kvinner.

De tre figurene illustrerer to problemer som gjelder flere regioner. Metoden har lett for å føre til nokså spisse toppunkter i de glattete ratene. Særlig gjelder dette kvinner. For flere regioner fører dette til at den glattete kurven skjærer gjennom de observerte ratene for et par aldre høyere, slik at bredden av toppen under toppunktet blir for liten.

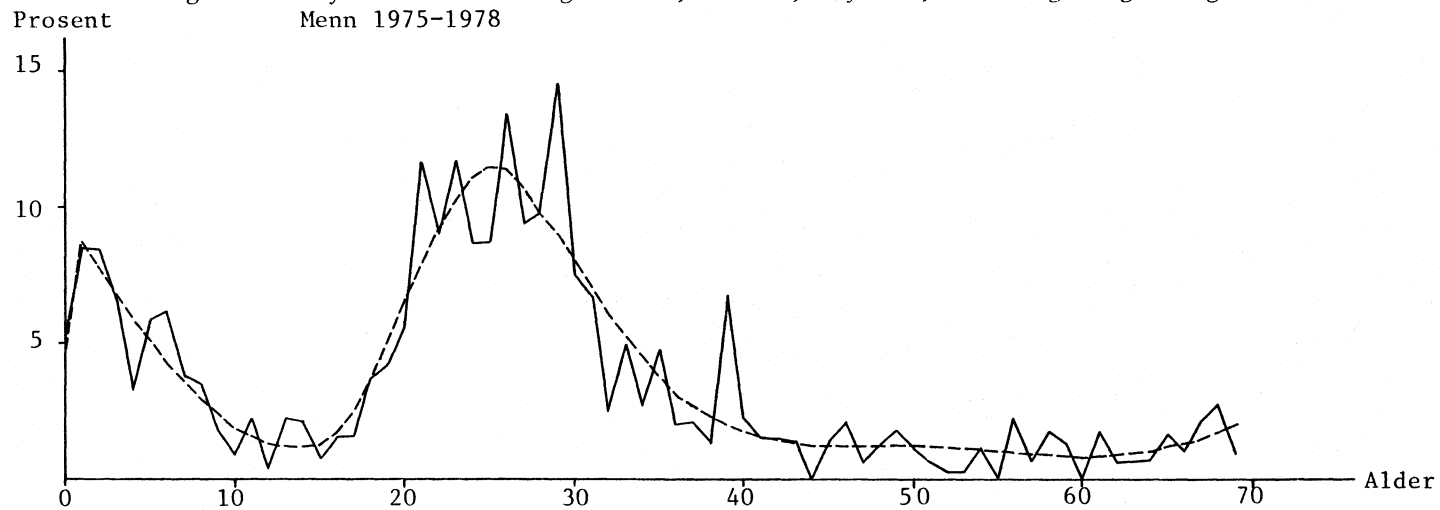
Noen regioner har en økt bruttoutflytting av eldre personer (65-69 år) i forhold til nivået for 40-50 årsaldrene. I figurene 9-11 har dette slått ut i at de glattete ratene øker til slutt. Vi må likevel si at metoden ikke representerer dette fenomenet på noen god måte. Den glattete kurven burde hatt mulighet til å gi en lokal topp i 65-68 årsalderen, for så evt. å synke mot null.

Av figur 10 og 11 får vi inntrykk av at det underliggende flyttemønstreet som ligger bak råratene må ha vært relativt stabilt. Flytteratene for enkeltaldre, sett isolert, har likevel endret seg til dels betydelig. De glattete kurvene er imidlertid ganske like, noe som iallfall i dette tilfelle, tyder på at vi virkelig har kommet nærmere det underliggende flyttemønstreet med glattingen.

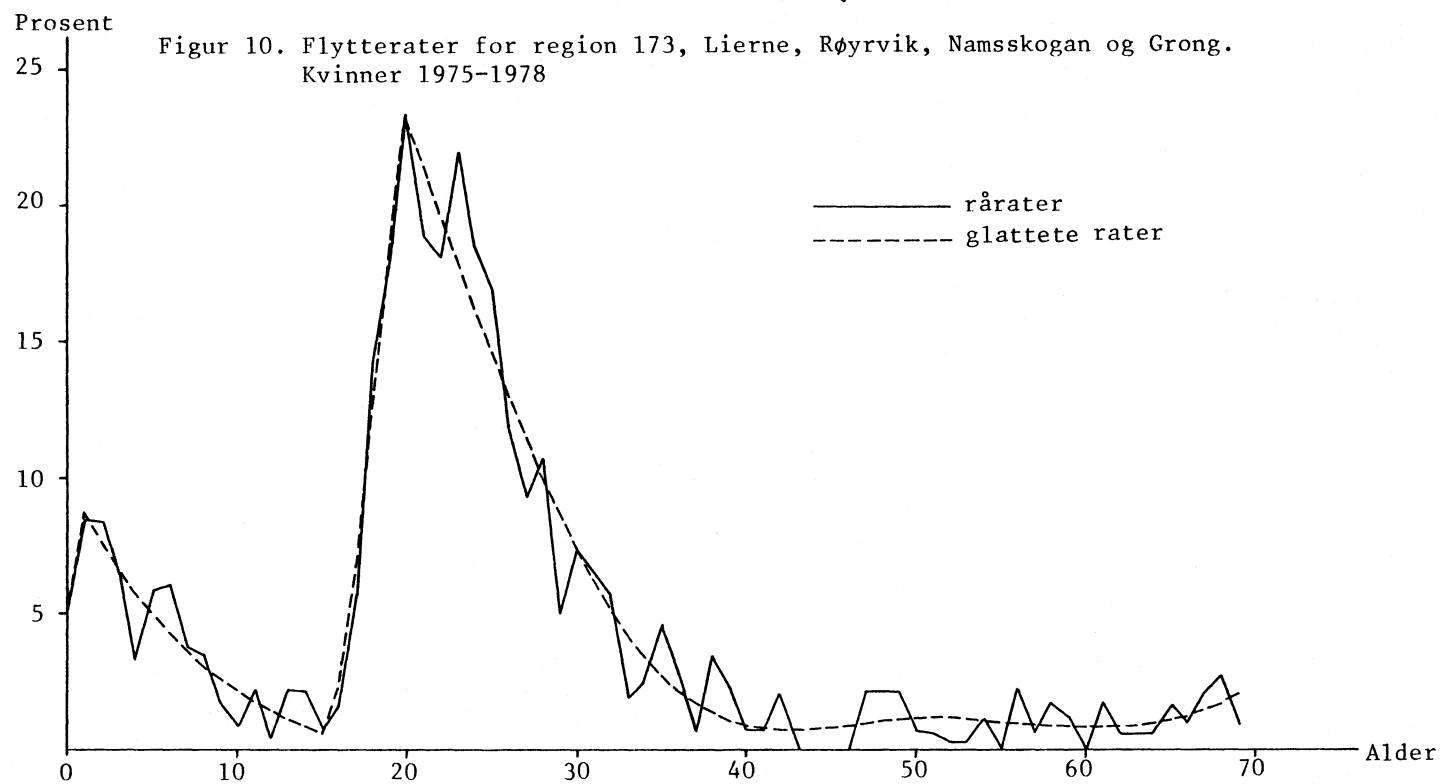
Det har vært et krav til glattemetoden at den skal kunne styres maskinelt. Samme metode må passe for begge kjønn i alle de 96 regionene. En må likevel være forberedt på at noen få av de 192 kurvene virker spesielle.

Et spesielt trekk som fantes i hvert fall i en 5-6 tilfelle i materialet fra 1973-76 var at noen kurver fikk en "dump" ned omkring skjøtepunktet i 14-15 årsalderen. Disse "dumpene" er det vanskelig å se noe til i de glattete ratene fra perioden 1975-1978. Tendensen kan vel likevel anes i de glattete kurvene i figur 12 og 13. I disse figurene er flytteratene for Halden og Aremark tegnet opp. I denne regionen var "dumpen" i 14-15 årsalderen mest framtrendende i materialet fra 1973-1976.

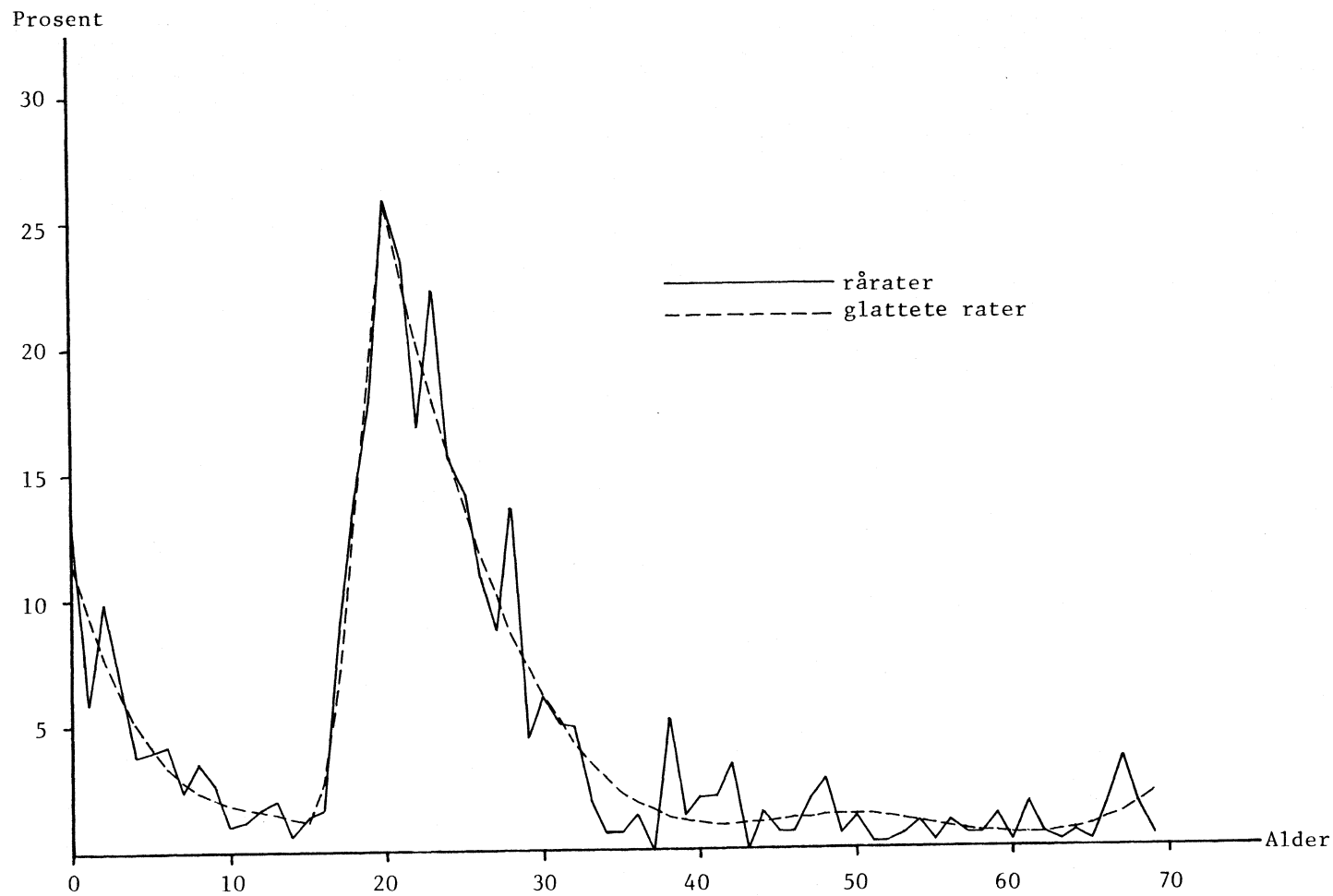
Figur 9. Flytterater for region 173, Lierne, Røyrvik, Namsskogan og Grong.
Menn 1975-1978



Figur 10. Flytterater for region 173, Lierne, Røyrvik, Namsskogan og Grong.
Kvinner 1975-1978

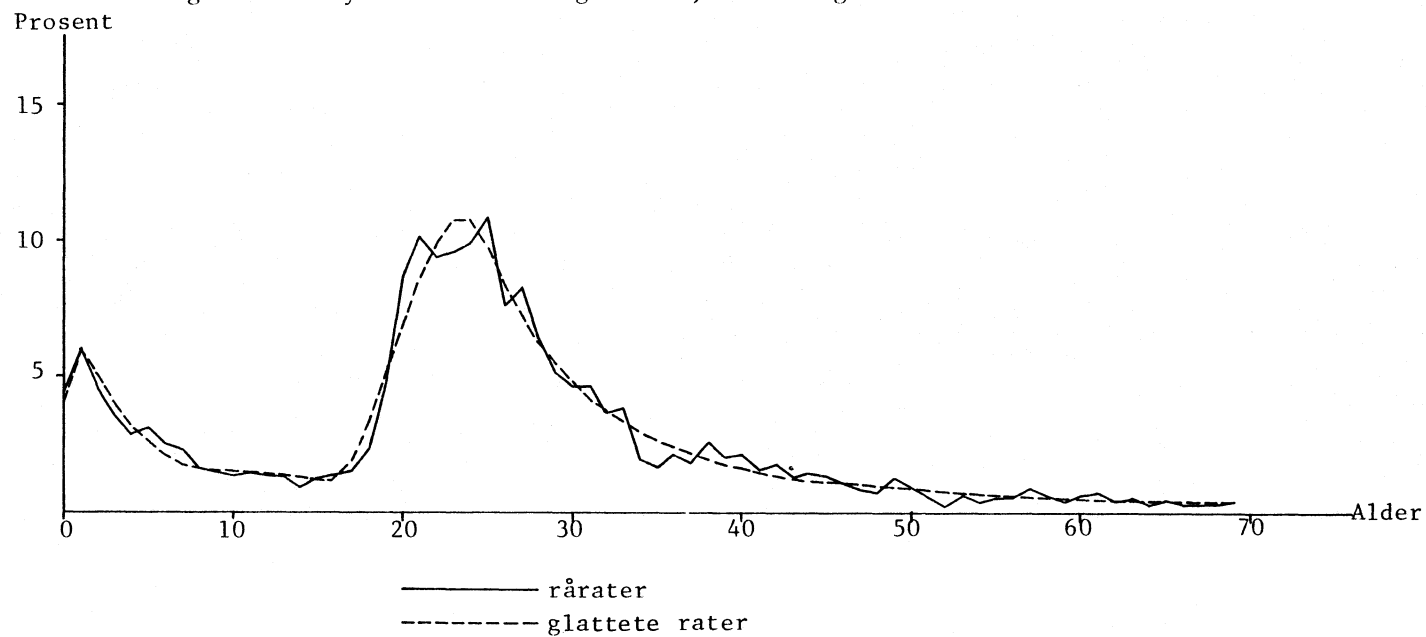


Figur 11. Flytterater¹⁾ for region 173, Lierne, Røyrvik, Namsskogan og Grong.
Kvinner 1973-1976



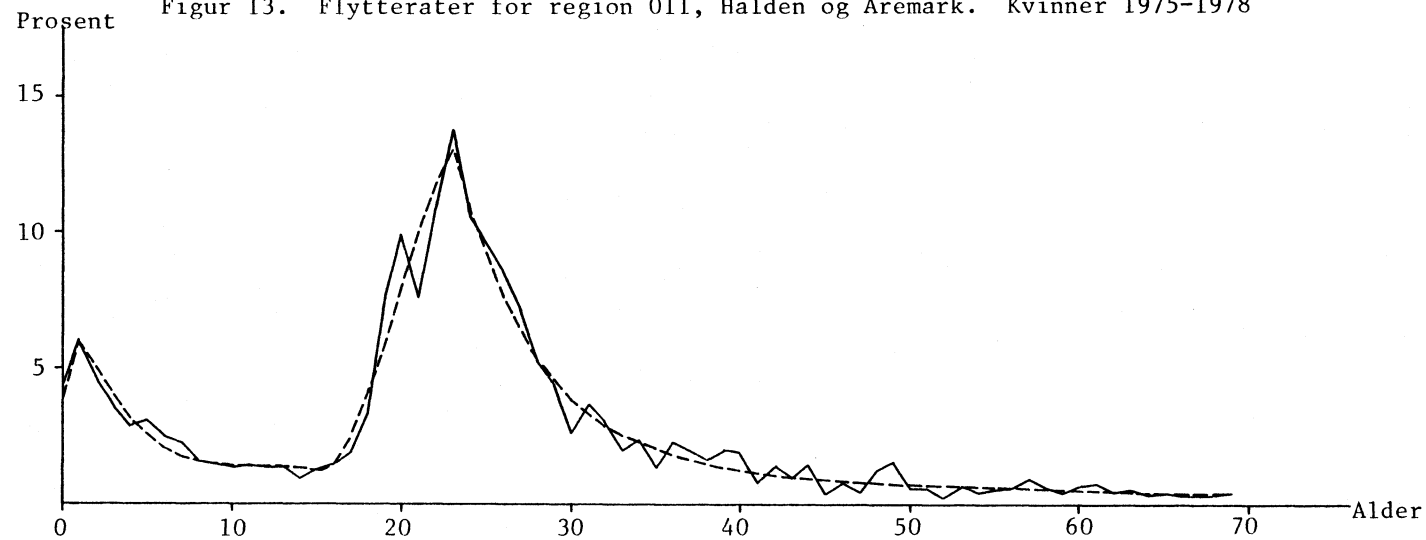
1) Ratene for nullåringer er her fordoblet.

Figur 12. Flytterater for region 011, Halden og Aremark. Menn 1975-1978



19

Figur 13. Flytterater for region 011, Halden og Aremark. Kvinner 1975-1978



5. OPPSUMMERING OG VURDERING

Glattingen av flytteratene er foretatt ut fra hensyn til den regionale befolkningsframskrivingen og bør ses på i lys av den anvendelsen. Den største usikkerheten er ikke egentlig knyttet til estimeringen av flyttemønstret i basisperioden, men heller til hvordan dette flyttemønstret utvikler seg over tid.

Den glattingen som er foretatt betyr en del for den beregnete flyttingen for fler av de ettårige alderstrinnene. Den har likevel antakelig lite å si for det toale antall flyttere som beregnes.

Disse to momentene har ført til at det ikke har vært satset spesielt store ressurser på glattingsprosjektet.

Til tross for en del svakheter vil vi akseptere den glattingsformen som er valgt. Denne glattingen ble da også brukt i befolkningsframskrivingen 1979.

I kapittel 6 har vi samlet noen av de forbedringsforslagene som har kommet inn siden prosjektet ble avsluttet. Det er ennå uklart om vi vil få tid til å gjennomføre dem.

6. MULIGE FORBEDRINGER

Parametrene i glattingsfunksjonen er estimert med vanlig minste kvadraters metode. Fordelen med denne metoden er at den passer lett inn i Byråets regneprogram, og at det ikke blir problemer i de tilfellene da de observerte flytteratene er null. Vi vil oppnå en forbedring i estimeringen ved å ta hensyn til at flytteratene har forskjellig varians i forskjellige aldersgrupper. (Våre rater er binomisk fordelt.) Best estimering oppnås ved (modifisert) kji-kvadratminimaliseringsmetoden (se Hoem (1974)).

Den splines-funksjonen som er valgt inneholder relativt mange parametre (11 stk.), og utnytter i liten grad det vi vet om hvordan en kurve med flytterater vanligvis vil se ut.

Hoem har gjort meg oppmerksom på at den samme splines-funksjonen kan representeres ved litt enklere uttrykk, idet ikke alle parametrene som estimeres blir signifikant forskjellig fra null. Dette forutsetter nok at det tas hensyn til varierende varians for ratene.

Vi har forsøkt å ta hensyn til det vi vet om tendensen til like rater for gutter og jenter ved å "preglatte" ratene i de aktuelle aldrene. Vi har da beregnet de "råratene" som har gått inn i glattingsprosessen ved å forutsette at ratene for hvert kjønn er like i aldrene 0-15 og 51-69 år. Glattingsmetoden tar nå ikke i seg selv hensyn til dette. De ferdig glattete ratene for disse aldrene er derfor ikke like for hvert kjønn. Hoem har pekt på at glattingen lett kan utvides til å ta hensyn til dette. Det er særlig aktuelt for barnas del.

I vår variant av splines-glattingen er skjøtepunktene ("nodene") i prinsippet faste. Det fins metoder som tillater en tilpassing av ett eller flere av disse skjøtepunktene. Jfr. de Boor og Rice (1968). De nødvendige programmene er imidlertid ikke implementert i Byrået. Utskrift av et regneprogram er imidlertid gjengitt i de to artiklene til de Boor og Rice. Noen forslag til endringer i dette programmet er gitt i Nielsen (1980), avsnitt 3 og vedlegg 1. Programmet bør gjøres tilgjengelig i Byrået.

Et problem ved glattingsmetoden er at den ikke sikrer at de glattede ratene blir positive. Metoden gav negativ rate i ett tilfelle i materialet fra 1973-76. Den glattede raten for kvinner i alderen 15 år i p.p.-region 145 (Eid, Gloppen, Stryn) er estimert til -0.0029 , mens den observerte raten var $+0.0036$. I dette tilfellet ble det ingen alvorlig feil ved å sette den glattete raten til null. Det ser heller ikke ut til at det har dukket opp problemer av denne typen i arbeidet med ratene for 1975-78.

Problemet kunne vært unngått ved å transformere ratene til logaritmer før glatting.

Det har ikke vært prøvet andre funksjonsformer enn variasjoner av Splines-funksjoner. Etter at prosjektet ble avsluttet har jeg blitt oppmerksom på arbeid som er gjort med å tilpasse andre typer analytiske funksjoner til flytterater (se Rogers (1979)). Vi burde muligens også teste disse funksjonsformene mot de norske dataene.

LITTERATUR

- de Boor, Carl and John R. Rice (1968): "Least squares cubic spline approximation I/II - Fixed knots/Variable knots." Mimeo. Reissued by Mathematics Research Center, University of Wisconsin - Madison. (Tilgjengelig i Byrået.)
- Hoem, Jan (1974): "On the optimality of modified minimum chi-square analytic graduation". Statistisk Sentralbyrå, arbeidsnotat ANO IO 74/17.
- Nielsen, Jørgen Løvgreen (1980): "Kurveudjævning ved splinfunktioner". Upublisert spesialoppgave i forsikringsvidenskap. Forsikringsmatematisk laboratorium, Universitetet i København.
- Rideng, Arne (1974): "Statistisk Sentralbyrås befolkningsprognosemodell: Primære prognoseregioner og samarbeid om framskrivingene". Statistisk Sentralbyrå, arbeidsnotat ANO IO 75/25.
- Rogers, Andrei (1979): "Migration patterns and population redistribution". Regional Science and Urban Economics 9 (1979).
- Suits, Daniel B., A. Mason og L. Chan (1977): "Spline functions fitted by standard regression methods". The Review of Economics and Statistics 1977.
- Sørensen, Knut (1976): "Statistisk Sentralbyrås befolkningsprognosemodell ved de regionale framskrivinger 1975". Statistisk Sentralbyrå, Artikler nr. 80.

DOKUMENTASJON OG UTLEDNING AV BEREGNINGSFORMEL

1. Definisjoner

$\hat{u}(x)$: flytterate for bruttoutflytting for alder x i en gitt region.

Før glattingen ble flytteratene for barn under 16 år beregnet for gutter og jenter under ett. Også for voksne over 50 år er de preglattete ratene forutsatt like for menn og kvinner. Raten for nullåringer ble fordoblet før glatting (og så igjen halvert etterpå).

t_k : node (skjøtepunkt) nr. k ($k=0,1,\dots,5$)

Verdiene av nodene framgår av oppstillingen nedenfor:

t_0 : 0 år

t_1 : den av de to aldre 15 og 16 år der den observerte flytteraten er minst

t_2 : den av aldre i aldersintervallet $[20,28]$ der den observerte flytteraten er størst

t_3 : 34 år

t_4 : 49 år

t_5 : 69 år

Aldersintervallet (0-69 år) inndeles ved hjelp av nodene i 5 delintervaller, der intervall nr. k ligger mellom noden t_{k-1} og t_k . Vi får også bruk for å definere det matematiske uttrykket $[z]_+$ som det største av tallene 0 og z . D.v.s.

$$[x-t_i]_+ = \begin{cases} x-t_i & \text{hvis } x \geq t_i \\ 0 & \text{hvis } x < t_i \end{cases}$$

2. Forutsetninger

i Flytteratene i hvert delintervall kan tilnærmes med en tredjegrads funksjon

$$(1) \quad u(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3, \quad x \in (t_{i-1}, t_i), \quad i = 1, \dots, 5$$

ii I hvert skjøtepunkt (nodepunkt) er den glattede funksjonen kontinuerlig d.v.s. $\lim_{x \rightarrow t_i^+} u(x) = \lim_{x \rightarrow t_i^-} u(x)$, $i = 1, \dots, 4$

Innsetting fra (1) gir følgende restriksjoner på parametrene:

$$(2) \quad (a_{i+1} - a_i) + (b_{i+1} - b_i)t_i + (c_{i+1} - c_i)t_i^2 + (d_{i+1} - d_i)t_i^3 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 4$$

iii I hvert av de indre skjøtepunktene unntatt det andre har funksjonen $u(x)$ kontinuerlige førstederiverte. Det vil si:

$$\lim_{x \rightarrow t_i^+} \left(\frac{du(x)}{dx} \right) = \lim_{x \rightarrow t_i^-} \left(\frac{du(x)}{dx} \right), \quad i = 1, 3, 4.$$

Den glattete ratekurven får altså et knekkpunkt i 20-årsalderen der den registrerte flytteraten er størst.

Ved derivasjon og innsetting fra (1) får vi følgende krav til parametrene:

$$(3) \quad (b_{i+1} - b_i) + 2(c_{i+1} - c_i)t_i + 3(d_{i+1} - d_i)t_i^2 = 0, \quad i = 1, 3, 4.$$

iv I hvert av de indre skjøtepunktene unntatt de to første har funksjonen $u(x)$ kontinuerlige annenderiverte

$$\lim_{x \rightarrow t_i^+} \left(\frac{d^2 u(x)}{dx^2} \right) = \lim_{x \rightarrow t_i^-} \left(\frac{d^2 u(x)}{dx^2} \right), \quad i = 3, 4.$$

Den glattete ratekurven får her muligheten til å ha en krappere sving på seg ved 15-16 årsalder enn om vi hadde forutsatt kontinuerlig annenderivert også i dette skjøtepunktet. For det andre skjøtepunktet (i 20-års alderen) er forutsetningen (iv) delvis en følge av (iii). Derivasjon og innsetting fra (1) gir

$$(4) \quad (c_{i+1} - c_i) + 3(d_{i+1} - d_i)t_i = 0, \quad i = 3, 4.$$

Ligningen (1) inneholder 4 parametre for hvert intervall, i alt 20 stykker. Ligningene (2)-(4) gir til sammen 9 a priori restriksjoner på parametrene, slik at det bare gjenstår 11 parametre å estimere. Innsetting av (2)-(4) i (1) gir, etter en del regning:

$$\begin{aligned} u(x) = & a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + d_1 x^3 + (c_2 - c_1) [x - t_1]_+^2 + \\ & + (d_2 - d_1) \{ [x - t_1]_+^3 - 3t_1 [x - t_1]_+ \} + (b_3 - b_2) [x - t_2]_+ \\ & + (c_3 - c_2) [x - t_2]_+^2 + (d_3 - d_2) [x - t_2]_+^3 + \\ & + (d_4 - d_3) [x - t_3]_+^3 + (d_5 - d_4) [x - t_4]_+^3; \quad x = 0, \dots, 69 \end{aligned}$$

Ved en passende omformulering får vi

$$(5) \quad u(z_1 \dots z_{10}) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{10} \alpha_j z_j,$$

$$\begin{aligned} z_1 &= x & z_4 &= [x-t_1]_+^2 & z_7 &= [x^2-t_2^2]_+ \\ z_2 &= x^2 & z_5 &= [x^3-t_1^3]_+ - 3t_1^2[x-t_1]_+ & z_8 &= [x^3-t_2^3]_+ \\ z_3 &= x^3 & z_6 &= [x-t_2]_+ & z_9 &= [x-t_3]_+^3 \\ & & & & z_{10} &= [x-t_4]_+^3 \end{aligned}$$

Parametrene i (5) ble estimert ut fra de observerte flytteratene med vanlig minste kvadraters metode.

Utkommet i serien Rapporter fra Statistisk Sentralbyrå (RAPP) - ISSN 0332-8422

Trykt 1980

- Nr. 80/1 Svein Longva, Lorents Lorentsen and Øystein Olsen: Energy in a Multi-Sectoral Growth Model Energi i en flersektors vekstmodell Sidetall 22 Pris kr 9,00 ISBN 82-537-1082-8
- 80/2 Viggo Jean-Hansen: Totalregnskap for fiske- og fangstnæringen 1975 - 1978 Sidetall 33 Pris kr 9,00 ISBN 82-537-1080-1
- 80/3 Erik Biørn og Hans Erik Fosby: Kvartalsserier for brukerpriser på realkapital i norske produksjonssektorer Sidetall 60 Pris kr 11,00 ISBN 82-537-1087-9
- 80/4 Erik Biørn and Eilev S. Jansen: Consumer Demand in Norwegian Households 1973 - 1977 A Data Base for Micro-Econometrics Sidetall 130 Pris kr 13,00 ISBN 82-537-1086-0
- 80/5 Ole K. Hovland: Skattemodellen LOTTE Testing av framskrivingsmetoder Sidetall 30 Pris kr 9,00 ISBN 82-537-1088-7
- 80/6 Fylkesvise elektrisitetsprognoser for 1985 og 1990 En metodestudie Sidetall 56 Pris kr 11,00 ISBN 82-537-1091-7
- 80/7 Analyse av utviklingen i elektrisitetsforbruket 1978 og første halvår 1979 Sidetall 22 Pris kr 7,00 ISBN 82-537-1129-8
- 80/8 Øyvind Lone: Hovedklassifiseringa i arealregnskapet Sidetall 50 Pris kr 9,00 ISBN 82-537-1104-2
- 80/9 Tor Bjerkedal: Yrke og fødsel En undersøkelse over betydningen av kvinners yrkesaktivitet for opptreden av fosterskader Occupation and Outcome of Pregnancy Sidetall 93 Pris kr 11,00 ISBN 82-537-1111-5
- 80/10 Statistikk fra det økonomiske og medisinske informasjonssystem Alminnelige somatiske sykehus 1978 Sidetall 65 Pris kr 11,00 ISBN 82-537-1119-0
- 80/11 John Dagsvik: A Dynamic Model for Qualitative Choice Behaviour Implications for the Analysis of Labour Force Participation when the Total Supply of Labour is latent En dynamisk teori for kvalitativ valghandling Implikasjoner for analyse av yrkesdeltaking når det totale tilbud av arbeid er latent Sidetall 25 Pris kr 9,00 ISBN 82-537-1152-2
- 80/12 Torgeir Melien: Ressursregnskap for jern Sidetall 56 Pris kr 9,00 ISBN 82-537-1138-7
- 80/13 Eystein Glattre og Ellen Blix: En vurdering av dødsårsaksstatistikken Feil på dødsmeldingene Evaluation of the Cause-of-Death-Statistics Sidetall 64 Pris kr 11,00 ISBN 82-537-1136-0
- 80/14 Petter Frenger: Import Share Functions in Input - Output Analysis Importandelsfunksjoner i kryssløpsmodeller Sidetall 41 Pris kr 9,00 ISBN 82-537-1143-3
- 80/15 Den statistiske behandlingen av oljevirkksomheten Sidetall 56 Pris kr 11,00 ISBN 82-537-1150-6
- 80/16 Ådne Cappelen, Eva Ivås og Paal Sand: MODIS IV Detaljerte virkningstabeller for 1978 Sidetall 261 Pris kr 15,00 ISBN 82-537-1142-5
- 80/18 Susan Lingsom: Dagbøker med og uten faste tidsintervaller: En sammenlikning basert på prøveundersøkelse om tidsnytting 1979 Open and Fixed Interval Time Diaries: A Comparison Based on a Pilot Study on Time Use 1979 Sidetall 31 Pris kr 9,00 ISBN 82-537-1158-1
- 80/19 Sigurd Høst og Trygve Solheim: Radio- og fjernsynsundersøkelsen januar - februar 1980 Sidetall 101 Pris kr 13,00 ISBN 82-537-1155-7
- 80/20 Skatter og overføringer til private Historisk oversikt over satser mv. Årene 1969 - 1980 Sidetall 53 Pris kr 11,00 ISBN 82-537-1151-4
- 80/21 Olav Bjerkholt og Øystein Olsen: Optimal kapasitet og fastkraftpotensial i et vannkraftsystem Sidetall 36 Pris kr 9,00 ISBN 82-537-1154-9
- 80/22 Rolf Aaberge: Eksakte metoder for analyse av to-vegstabellar Sidetall 80 Pris kr 11,00 ISBN 82-537-1161-1

Utkommet i serien Rapporter fra Statistisk Sentralbyrå (RAPP) (forts.) - ISSN 0332-8422

Trykt 1980 (forts.)

- Nr. 80/23 P. Frenger, E. S. Jansen and M. Reymert: Tariffs in a World Trade Model. An Analysis of Changing Competitiveness due to Tariff Reductions in the 1960's and 1970's Sidetall 47
Pris kr 9,00 ISBN 82-537-1163-8
- 80/24 Jan Mønnesland: Bestandsuavhengige giftermålsrater Sidetall 50 Pris kr 9,00
ISBN 82-537-1167-0
- 80/25 Kari Lotsberg: Virkninger for norsk økonomi av endringer i samhandel Norge - utviklingslandene Sidetall 67 Pris kr 11,00 ISBN 82-537-1170-0
- 80/26 Lasse Fridstrøm: Lineære og log-lineære modeller for kvalitative avhengige variable
Linear and Log-Linear Qualitative Response Models Sidetall 122 Pris kr 13,00
ISBN 82-537-1184-0
- 80/27 Aktuelle skattetall 1980 Current Tax Data Sidetall 43 Pris kr 9,00 ISBN 82-537-1194-8
- 80/28 Forbruksundersøkelse blant soldater 1979 Sidetall 45 Pris kr 11,00 ISBN 82-537-1199-9
- 80/30 Totalregnskap for fiske- og fangstnæringen 1976 - 1979 Sidetall 37 Pris kr 9,00
ISBN 82-537-1205-7
- 80/32 Knut Ø. Sørensen: Glatting av flytterater i Statistisk Sentralbyrås befolkningsframskrivninger
Sidetall 26 Pris kr 7,00 ISBN 82-537-1216-2

Pris kr 7,00

Publikasjonen utgis i kommisjon hos H. Aschehoug & Co. og
Universitetsforlaget, Oslo, og er til salgs hos alle bokhandlere.

ISBN 82-537-1216-2
ISSN 0332-8422