

RAPPORTER

EKSAKTE METODAR FOR ANALYSE AV 2x2-TABELLAR

AV
ROLF AABERGE

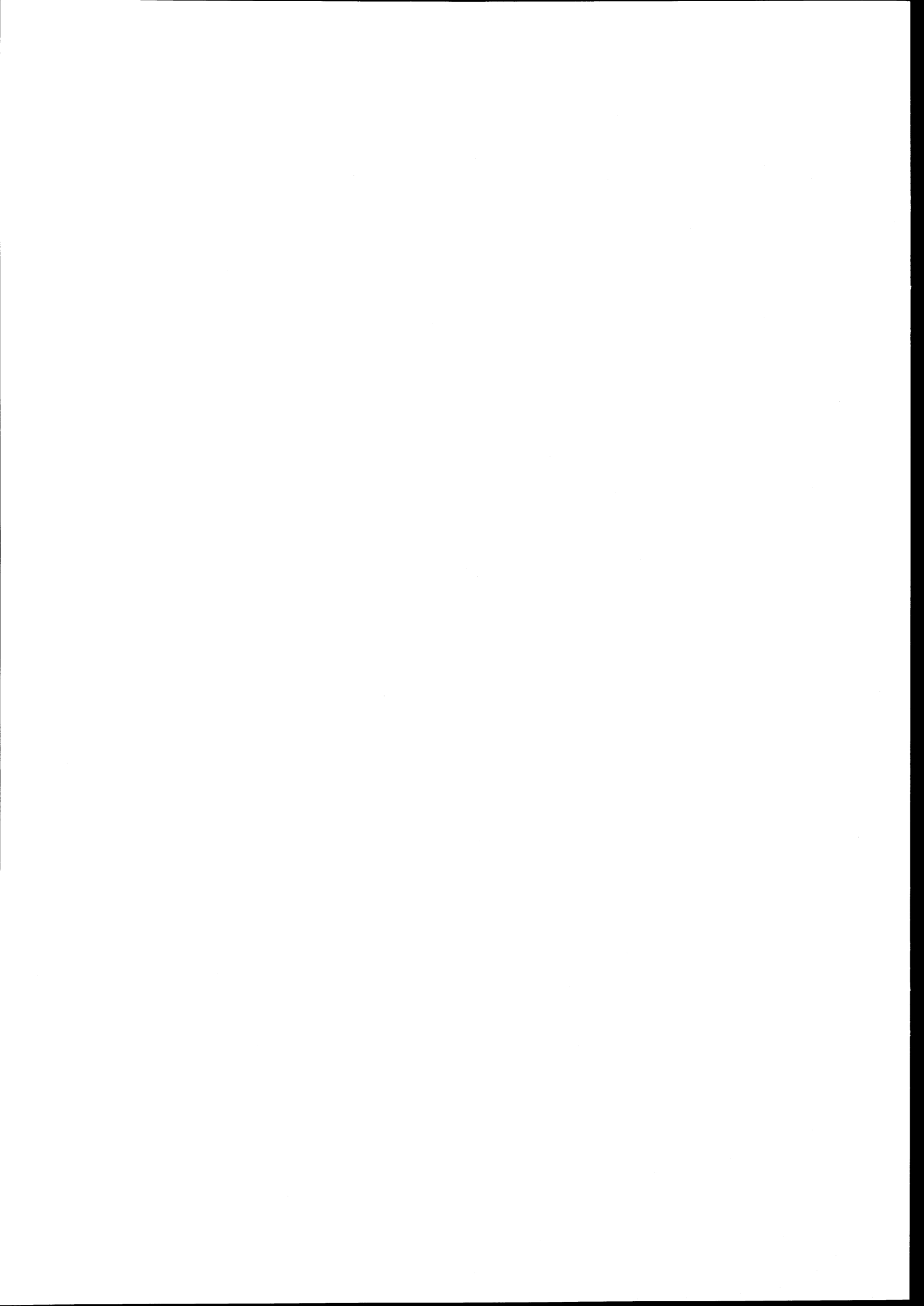
STATISTISK SENTRALBYRÅ
OSLO

RAPPORTAR FRÅ STATISTISK SENTRALBYRÅ 79/20

**EKSAKTE METODAR
FOR ANALYSE AV 2x2 - TABELLAR**

AV
ROLF AABERGE

OSLO 1979
ISBN 82-537-1048-8
ISSN 0332-8422



FØREORD

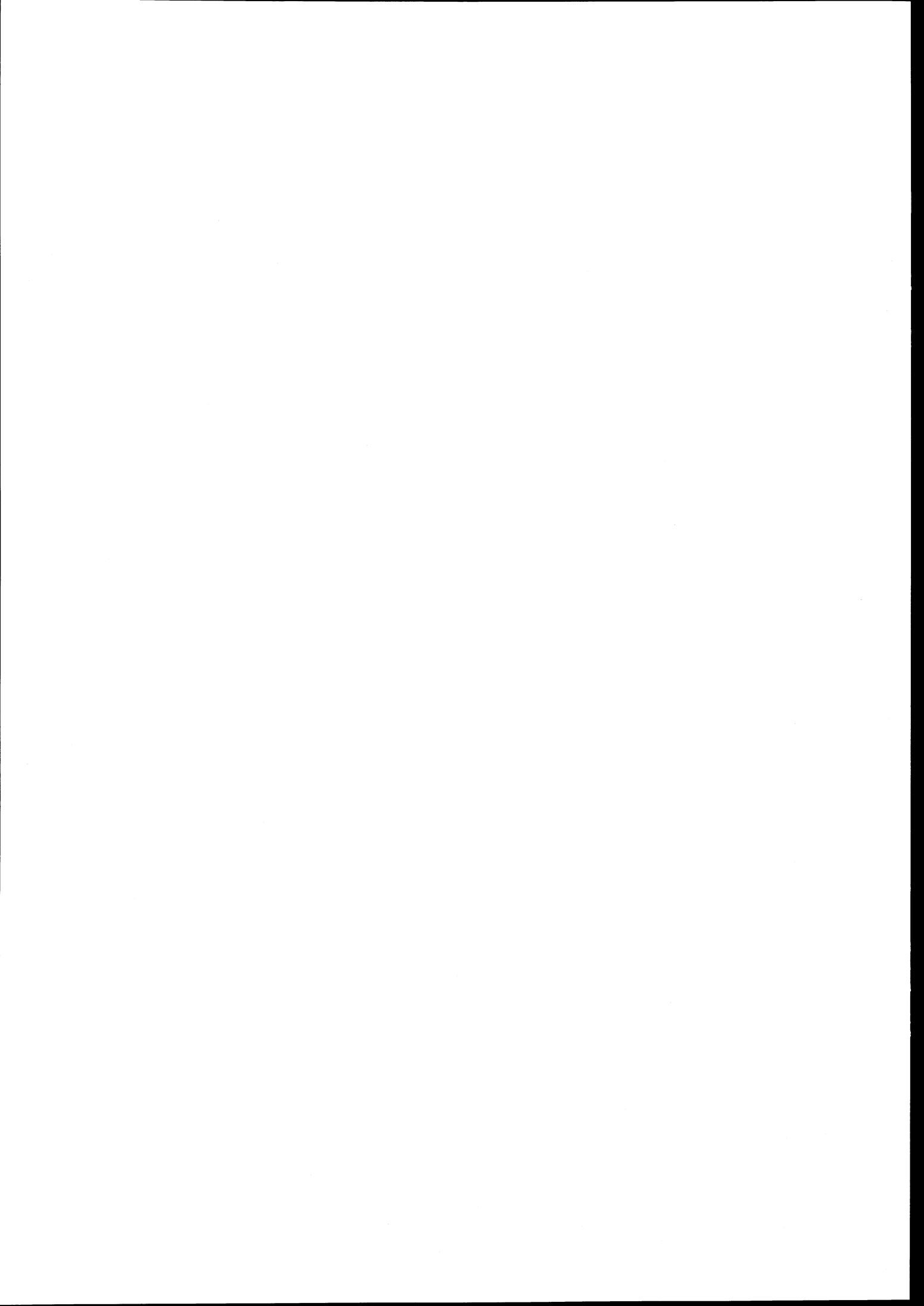
Statistisk Sentralbyrå hadde 100-årsjubileum i 1976. I samband med jubileet sette Norges Bank av eit fond på ein million kroner som gåve til Byrået. Fondet skal nyttast til å styrke metodearbeidet i Byrået.

Hausten 1977 blei det derfor sett i gang eit omfattande forskningsprosjekt under leiing av professor Erling Sverdrup. Eit av problema knytta til dette prosjektet var å utvikle metodar for analyse av tabellar.

I denne rapporten blir det drøfta metodar for analyse av 2x2-tabellar. Metodane har eigenskapar som gjer dei særskilt eigna som analysereiskap for tabellar med få observasjonar. Slike metodar må bygge på matematisk statistikk. Rapporten er derfor særst teknisk samanlikna med andre rapportar frå Statistisk Sentralbyrå.

Oslo, 10. oktober 1979

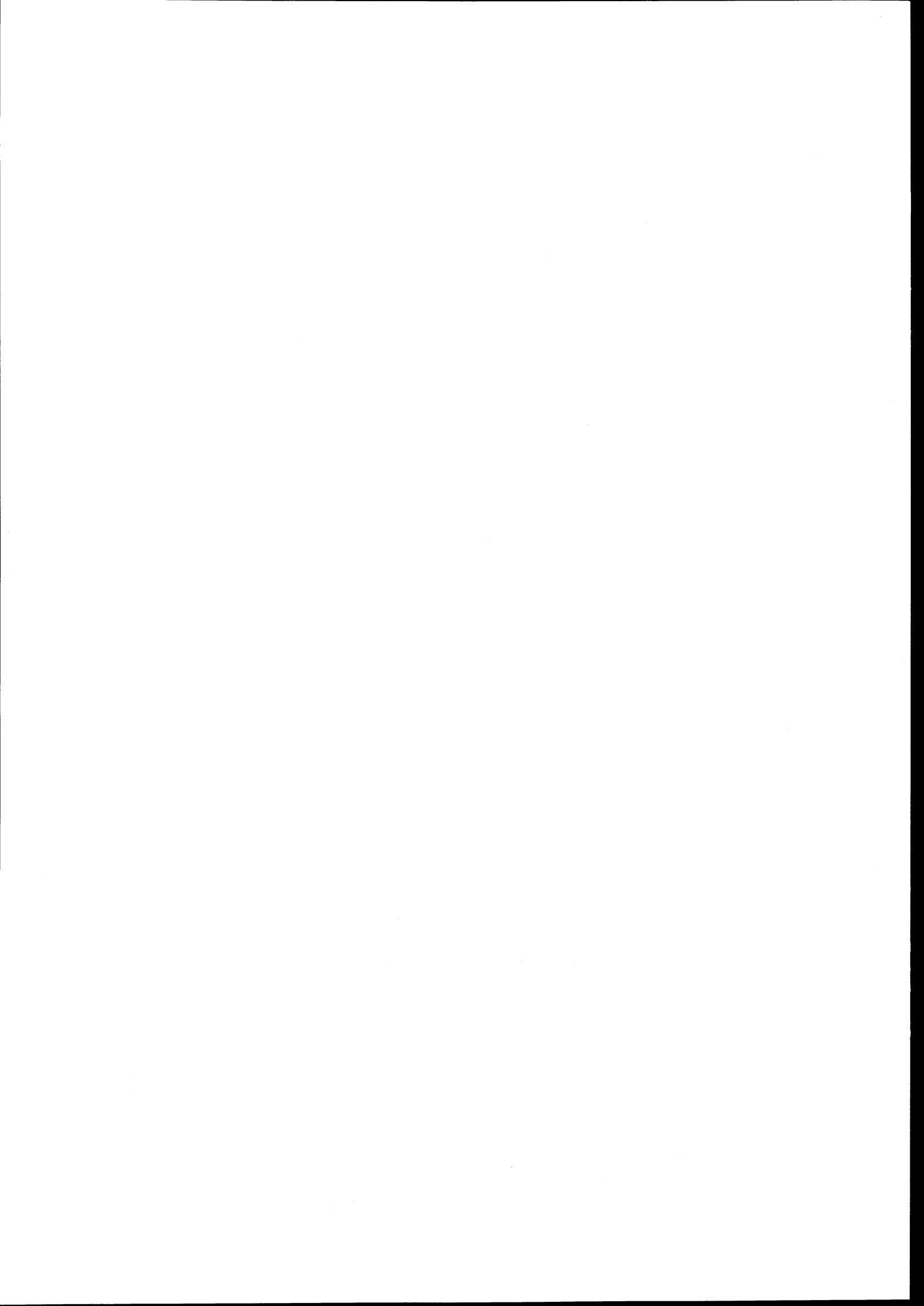
Petter Jakob Bjerve



I N N H A L D ^{x)}

	Side
1. Innleiing	7
1.1. Motiverande eksempel	8
1.2. Definisjon av nokre viktige matematisk-statistiske omgrep	10
2. Konstruksjon av overalt sterkaste styrkerette testar	11
3. Optimale testmetodar for ulike hypotesar i ein 2x2-tabell ...	16
3.1. Uavhengigheit	16
3.2. Symmetri	18
3.3. Relativ symmetri	21
3.4. Homogenitet	24
4. Asymptotiske metodar	28
5. Effektivitetsegenskapar til Fisher-Irwins test	30
6. Dei sentrale omgrepa i 2x2-tabellar uttrykt ved parametrane i den log-lineære modellen	42
Vedlegg 1. Analyse av 2x2-tabellar når observasjonane er Poisson-fordelte	44
Vedlegg 2. Tre-desisjonsproblem	48
Utkome i serien Rapportar frå Statistisk Sentralbyrå	52

x) Tor Haldorsen og Jon Helgeland har gitt viktig støtte under arbeidet med notatet. Gruppe for analytisk system- og programmeringsarbeid har ytt programmeringsassistanse.



Samandrag

Dei fleste matematisk-statistiske metodane som er utvikla til analyse av tabellar, byggjer på føresetnader om at talet på observasjonar i cellene er "stort". Haldorsen (1977a) og (1977b) omtalar metodar som kviler på dette kravet.

I denne rapporten skal vi, for ulike hypotesar i ein 2×2 -tabell, presentere eksakte testmetodar, dvs. metodar som ikkje krev at talet på observasjonar i cellene er "stort".

Fisher-Irwins test er eit spesialtilfelle av vårt resultat. Den blir nytta til å vurdere uavhengigheit eller homogenitet i 2×2 -tabellar. Fisher-Irwins test har optimale eigenskapar. Tilsvarande eigenskapar har dei ulike metodane som blir presenterte i denne rapporten.

1. Innleiing

Observasjonsverdiane i ei undersøking treng ikkje vere numeriske. I mange tilfelle vil dei berre spesifisere kva slags kategoriar for dei ulike kjennemerka i undersøkinga kvar av individa (einingane) høyrer til. Data av denne typen kallar vi kategoriske.

Vi klassifiserer individa frå ei undersøking etter eitt eller fleire kjennemerke. Ein kontingenstabell viser da kor mange individ som fell under kvar av dei ulike kombinasjonane av kategoriane for kjennemerka. Den enklaste kontingenstabellen, 2×2 -tabellen, er basert på fire celler. Dette er ein tabell med to kjennemerker, der kvart kjennemerke berre har to kategoriar. I Statistisk Sentralbyrå ser vi på dei fleste kontingenstabellane som resultat av ei eller fleire multinomiske forsøksrekkjer.

I samband med prosjektet "Analyse og estimering ved kategoriske data" som har vore leia av professor Sverdrup, har vi arbeidd med delprosjektet "Eksakte metodar for analyse av tabellar". Vi har under dette prosjektet utvikla resultat for fleirvegstabellar. Desse resultatata, som vi kan sjå på som generaliseringar av resultatata i denne rapporten, vil bli presenterte i ein seinare rapport. Ved å handsama 2×2 -tabellar særskilt, meiner vi å oppnå ei betre formidling av dei ideane vi har arbeidd med.

Dei mest fruktbare og nytta omgrepa i tilknytning til analyse av 2×2 -tabellar er uavhengigheit, symmetri, homogenitet og relativ symmetri.

Desse omgrepa har ein presis matematisk definisjon uttrykt ved ulike funksjonar av parametrane i modellen for tabellen. I rapporten viser vi kva slags informasjon desse ulike parameterfunksjonane kan gi oss. For å vurdere denne informasjonen har vi utvikla optimale testar. Desse testane blir presentert saman med eksempel på bruk av dei.

I rapporten gir vi ellers ei vurdering av effektiviteten til Fisher-Irwins test. Vidare gir vi ein omtale av log-lineære modellar. I den samanheng viser vi at viktige situasjonar ikkje er dekkja av dei modellane som ECTA er avgrensa til å gjelde for. ECTA er eit program for tabellanalyse som er i bruk i Statistisk Sentralbyrå.

Rapporten er bygd opp slik at dei ulike kapitla delvis kan lesast uavhengig av kvarandre. Kapitla 2 og 5 og delvis vedlegg 1 krev grundige kunnskarar i matematisk statistikk, medan kapitla 3, 4 og 6 og vedlegg 2 stiller mindre krav til lesaren sine matematisk statistiske kunnskarar. Kapittel 3 inneheld fleire eksempel, der det er nytta data frå Statistisk Sentralbyrå.

Vi har valt å skrive publikasjonen på nynorsk. Innafor fagområdet matematisk-statistikk har nynorsk skriftspråk så å seie ingen tradisjon. Som dei fleste veit, er bruk av substantiv mykje mindre utprega på nynorsk enn på bokmål. I matematisk fagterminologi kjem ein ikkje unna utstrekt substantivbruk, særleg fordi vi treng nemningar for ei rekkje viktige omgrep. Dette har ført til at vi har nytta ord og konstruksjonar, som i dag ikkje er tilletne på nynorsk.

1.1. Motiverande eksempel

Med data frå Levekårundersøkinga 1973, gir vi i tabell 1 grunnmaterialet for arbeidssituasjonen i ein periode på 12 månader til to pendlar-grupper.

Tabell 1. Lønstakarar i grupper for pendlarstatus etter arbeidssituasjon siste 12 månader.

	Har vore utan arbeid	Har ikkje vore utan arbeid	Sum
Veke- og langtidspendlarar	5	31	36
Dagpendlarar	2	58	60
Sum	7	89	96

Dei tabellane som oftast førekjem i publikasjonane i Statistisk Sentralbyrå, viser korleis einingar i ulike grupper prosentvis fordeler seg med omsyn på ein variabel. I ein Byråpublikasjon ville derfor materialet i tabell 1 bli presentert som vist i tabell 2.

Tabell 2. Lønstakarar i grupper for pendlarstatus etter arbeidssituasjon siste 12 månader. Prosent.

Pendlarstatus	I alt	Har vore utan arbeid	Har ikkje vore utan arbeid	Talet på personar
Veke- og langtidspendlarar ..	100	14	86	36
Dagpendlarar	100	3	97	60

I samband med kommentering av denne tabellen ville mange påstå at veke- og langtidspendlarane har vore meir utsette for arbeidsløyse enn dagpendlarane i den aktuelle 12 månadersperioden.

Vi skal no gi ei meir formell handsaming av tabellen for å undersøke om det er dekning for påstanden ovafor.

Vi vel å sjå på problemet med å kommentere tabellen som eit val mellom tre avgjerder (desisjonar):

- (i) større arbeidsløyse blant veke- og langtidspendlarane
- (ii) større arbeidsløyse blant dagpendlarane
- (iii) ikkje seie noko.

Dette vert kalla tre-desisjonsproblem og blir omtala i vedlegg 2.

For å etablere ein desisjonsregel for dette problemet, må vi bestemme ein modell for tabellen. I tabell 2 blir kvar av gruppene (i.forspalten) skildra av binomiske fordelingar, dvs. modellen for tabellen er produkt-multinomisk (sjå kap. 3.4.). Vi kan da uttrykkje problemet ved parametrane i modellen (3.12) for tabellen.

Som desisjonsregel skal vi derfor gjere bruk av den eksakte metoden som blir presentert i kap. 3.4. Vi krev at desisjonsregelen skal ha nivå 0.05, dvs. sannsyna for feilaktig å påstå (i) og feilaktig å påstå (ii) skal vere høgst 0.05.

For materialet i tabell 1 gir den eksakte desisjonsregelen avgjerd (iii), dvs. det er ikkje dekning for den påstanden vi nemnde innleiingsvis.

Sidan dei eksakte metodane som hittil har vore i bruk er reknemessig ressurskrevjande, har arbeidet med å utvikle eksakte metodar blitt neglisjert. Dei asymptotiske (tilnærma) metodane har derfor også fått ein brei plass i vitskaplege brukarmiljø. Ukritisk bruk av desse metodane, spesielt på små utval, kan gi konklusjonar det ikkje er dekning for i datamaterialet. Årsaka til dette er den manglande presisjonen til dei asymptotiske metodane når utvala er av liten eller moderat storleik.

Ved å bruke den tilnærma utgåva av den eksakte metoden i kap. 3.4. på materialet i tabell 1, blir resultatet at vi kan påstå (i). I denne situasjonen har vi altså eit eksempel på at bruk av ein asymptotisk metode ville føre til ein konklusjon det ikkje var dekning for i materialet.

I Byrået er det praksis å publisere prosentfordelingar som byggjer på 25 eller fleire observasjonar. Grunngevinga for dette er at

- (i) anslaga på andelane i prosentfordelingar som byggjer på mindre enn 25 observasjonar er for usikre
- (ii) eksisterande metodar for analyse av tabellar er asymptotiske og stiller dermed krav om relativt store utval.

Sidan metodane som blir presentert i kap. 3 (for fleirvegstabellar i eit komande notat) ikkje legg krav på storleiken til utvala, kan vi også nytte desse metodane til å vurdere materialet i tabellar som byggjer på mindre enn 25 observasjonar. Dei fleste prøveundersøkingane er baserte på relativt små utval. Dette resulterer i langt fleire tabellar med små observasjonstal enn det som er vanleg for hovudundersøkingane. Ved å nytte eksakte metodar til analyse av tabellane, får vi derfor ei betre utnytting av data frå prøveundersøkingane.

1.2. Definisjon av nokre viktige matematisk-statistiske omgrep

La X ha fordeling P , der $P \in \mathcal{P}$. \mathcal{P} er ein eksponensiell fordelingsklasse, om vi for einkvar $P \in \mathcal{P}$ har at

$$(I) \quad dP = a(P) \exp(\theta(P)T(x)) dP_0$$

der P_0 er eit element i \mathcal{P} , θ vektor med s element og $T = (T_1, \dots, T_s)'$.

La $\mathcal{C} = \theta(\mathcal{P})$ der \mathcal{P} er eksponensiell. Dersom avbildninga $\psi : P \rightarrow \theta(P)$, $P \in \mathcal{P}$ er ein-eintydig så seier vi at parametriseringa ψ^{-1} er kanonisk og minimal kanonisk viss dimensjonen til \mathcal{C} er lik s .

La \mathcal{P} vere ein eksponensiell fordelingsklasse der T er ein minimal kanonisk observator for \mathcal{P} . La P_0 vere eit element i \mathcal{P} . Da er fordelingsklassen \mathcal{P} generert av (P_0, T) ikkje avhengig av P_0 og T og vidare er $\mathcal{P} \subseteq \tilde{\mathcal{P}}$. Vi seier at \mathcal{P} er kanonisk viss $\mathcal{P} = \tilde{\mathcal{P}}$.

Ein eksponensiell fordelingsklasse er regulær viss \mathcal{P} er kanonisk og viss vi for ein eller annan minimal kanonisk representasjon $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ har at mengda Θ er open.

Θ er ei affin mengd viss $\sum_{i=1}^2 a_i \theta_i \in \Theta$ for alle $\theta_i \in \Theta$ $i=1,2$ og alle reelle a_1, a_2 slik at $\sum_{i=1}^2 a_i = 1$.

Vi skal teste hypotesen $P \in \mathcal{P}_0$, der $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$, ved hjelp av testen δ . $\delta(x)$ er det betinga sannsynet for å forkaste hypotesen gitt $X = x$. Styrkefunksjonen for δ er gitt ved

$$\beta(\delta, P) = E\delta(X) = \int \delta(x) dP.$$

Vi seier at testen har nivå ε viss

$$\beta(\delta, P) \leq \varepsilon \quad \text{for } P \in \mathcal{P}_0$$

og at den er styrkerett viss vi i tillegg har at

$$\beta(\delta, P) \geq \varepsilon \quad \text{for } P \in \mathcal{P} - \mathcal{P}_0.$$

Definisjonane ovafor er tekne frå Barndorff-Nielssen (1970). Regularitetsføresetnaden er strengare enn den som til vanleg vert nytta, sjå f.eks. Lehmann (1959) og Sverdrup (1979).

2. Kontruksjon av overalt sterkaste styrkerette testar

Observasjonane i 2x2-tabellar vil vi her sjå på som genererte frå ein av følgjande tre modellar: Poisson, multinomisk eller produktmultinomisk. I Byrået er det vanleg å bruke den multinomiske eller produktmultinomiske modellen for tabellane.

Under Poisson-modellen har vi inga binding på utvalstorleiken. Vi ser på kvar av cellene i tabellen som uavhengige og Poisson-fordelte. Denne modellen er omtala i vedlegg 1.

I dette kapitlet skal vi studere tabellar som er resultat av eit multinomisk forsøk. Utvalstorleiken er fast. Dersom vi i forsøket har halde to av marginalane fast (f.eks. forspalten i 2x2-tabellen) blir den underliggjande modellen produktmultinomisk. Vi har da i oppgåve å samanlikne to binomiske forsøksrekkjer. Denne situasjonen er omtala i kapittel 3.4.

Både den multinomiske og den produktmultinomiske modellen kan uttrykkjast som betinga Poisson-modellar.

Vi har no N uavhengige forsøk som kan kryssklassifiserast m.o.p. to kjennemerke (variablar) A og B . Kvart kjennemerke har to kategoriar. Resultatet av N slike forsøk kan vi gi i 2×2 -tabellen

	B_1	B_2	Sum
A_1	X_{11}	X_{12}	X_{1+}
A_2	X_{21}	X_{22}	X_{2+}
Sum	X_{+1}	X_{+2}	N

der X -ane er multinomisk fordelte med underliggjande parametrar

	B_1	B_2	Sum
A_1	p_{11}	p_{12}	p_{1+}
A_2	p_{21}	p_{22}	p_{2+}
Sum	p_{+1}	p_{+2}	1

der $p_{ij} = \Pr(A_i \cap B_j)$ og $\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 p_{ij} = 1$. Marginalsannsyna p_{i+} og p_{+j} er

definert ved

$$p_{i+} = p_{i1} + p_{i2}, \quad i = 1, 2$$

$$p_{+j} = p_{1j} + p_{2j}, \quad j = 1, 2.$$

Desse uttrykkjer sannsyna for at eit individ skal høyre til kategoriane i og j for respektive kjennemerke A og kjennemerke B .

Vi har for simultanfordelinga til X-ane

$$(2.1) \quad \Pr\left(\bigcap_{i,j} (X_{ij} = x_{ij})\right) = \frac{N!}{x_{11}! x_{12}! x_{21}! x_{22}!} p_{11}^{x_{11}} \cdot p_{12}^{x_{12}} \cdot p_{21}^{x_{21}} \cdot p_{22}^{x_{22}}$$

$$\text{der } \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 p_{ij} = 1 \quad \text{og} \quad \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 x_{ij} = N.$$

La \mathcal{P} vere fordelingsklassen definert ved (2.1). Vi har at \mathcal{P} er eksponensiell sidan vi for einkvar $P \in \mathcal{P}$ har at

$$(2.2) \quad dP = (4p_{22})^N \exp(x_{11} \log \frac{p_{11}}{p_{22}} + x_{12} \log \frac{p_{12}}{p_{22}} + x_{21} \log \frac{p_{21}}{p_{22}}) dP_0$$

der P_0 er sannsynfordelinga svarande til $p_{ij} = 1/4$, $i = 1,2$; $j=1,2$.

La

$$(2.3) \quad \theta_{ij} = \log \frac{p_{ij}}{p_{22}}, \quad i = 1,2; \quad j = 1,2 \text{ for } (i,j) \neq (2,2).$$

$$\text{dvs.} \quad p_{ij} = \frac{\exp(\theta_{ij})}{1 + \exp \theta_{11} + \exp \theta_{12} + \exp \theta_{21}}, \quad i=1,2; \quad j=1,2 \text{ for } (i,j) \neq (2,2).$$

$$\text{La } \mathcal{H} = \theta(\mathcal{P}), \quad \theta = (\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{21})'$$

Avbildinga $P \rightarrow \theta(P)$, $P \in \mathcal{P}$, definert ved (2.3), er ein-eintydig.

Dessutan er $\dim \mathcal{H} = 3$. Dette gir at parametriseringa $\{P_\theta; \theta \in \mathcal{H}\}$ gitt ved

$$(2.4) \quad dP_\theta = a(\theta) \exp(x_{11} \theta_{11} + x_{12} \theta_{12} + x_{21} \theta_{21}) dP_0$$

$$\text{der} \quad a(\theta) = 4^N (1 + \exp \theta_{11} + \exp \theta_{12} + \exp \theta_{21})^{-N},$$

er minimal kanonisk representasjon av \mathcal{P} .

Sidan $\mathcal{H} = \mathbb{R}^3$, er \mathcal{H} ei open mengd. Vi har derfor at den eksponensielle fordelingsklassen \mathcal{P} er regulær. La \mathcal{P}_0 vere ein hypotese til den eksponensielle fordelingsklassen \mathcal{P} . Nedafor vil vi avgrense oss til å studere affine hypotesar, \mathcal{P}_0 . Grunnen til dette er følgjande resultat frå Barndorff-Nielsen (1970):

Korollar 9.2.1. La \mathcal{P} vere ein regulær eksponensiell fordelingsklasse og la \mathcal{P}_0 vere ein hypotese til \mathcal{P} . Da er dei to følgjande utsegna ekvivalente

- (i) \mathcal{P}_0 er affin
 (ii) \mathcal{P}_0 er regulær.

Vi vil vidare avgrense oss til dei \mathcal{P}_0 og \mathcal{P} , som er slik at hypotesen (\mathcal{P}_0) kan uttrykkast som utsegn om ein parameter, γ .

La $\mathcal{P}_{\gamma, B}$ vere ein klasse av fordelingar definert ved

$$(2.5) \quad \mathcal{P}_{\gamma, B} = \{P_\theta : B\theta = v + \gamma u\}$$

der $\gamma \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathcal{M}$, B er ei $r \times 3$ -matrise med rang r , $r = 1, 2, 3$, v og u er vektorar med dimensjon r , $u \neq 0$.

Vi har opplagt at $\mathcal{P}_{\gamma, B} \subseteq \mathcal{P}$.

Vi skal no teste hypotesane H_j mot alternativa A_j , $j = 1, 2, 3, 4$:

$$H_1: \gamma \leq \gamma_0 \quad (\gamma = \gamma_0)$$

$$A_1: \gamma > \gamma_0$$

$$H_2: \gamma \leq \gamma_1 \text{ eller } \gamma \geq \gamma_2$$

$$A_2: \gamma_1 < \gamma < \gamma_2$$

$$H_3: \gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2$$

$$A_3: \gamma < \gamma_1 \text{ eller } \gamma > \gamma_2$$

$$H_4: \gamma = \gamma_0$$

$$A_4: \gamma \neq \gamma_0$$

Setning 1. La hypotesen \mathcal{P}_0 vere definert ved (2.5), dvs. $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_{\gamma, B}$;

$\gamma \in H_j$, $j=1, \dots, 4$. Da eksisterer det overalt sterkaste styrkerette testar med nivå ε for å teste \mathcal{P}_0 mot $\mathcal{P}_{\gamma, B}$, $\gamma \in A_j$, $j=1, \dots, 4$.

Prov. La $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{M}_1$

der $\mathcal{M}_1 = \{\theta: B\theta = v + \gamma u\}$, og la $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ vere faste tal slik

at $\sum_{i=1}^2 a_i = 1$. Dette gir at $B(\sum_{i=1}^2 a_i \theta_i) = \sum_{i=1}^2 a_i B\theta_i = \sum_{i=1}^2 a_i (v + \gamma u) = v + \gamma u$

og dermed har vi vist at \mathcal{M}_1 og dermed $\mathcal{P}_{\gamma, B}$ er affin.

Sidan \mathcal{P} definert ved (2.4) er regulær får vi dermed fra Korollar 9.2.1 Barndorff-Nielsen (1970) at $\mathcal{P}_{\gamma, B}$ er regulær. Føresetnadene i teorem 3 (kap. 4), Lehmann (1959) er da oppfylt. Resultatet i Setning 1 følger fra denne teoremet.

Vi skal no etablere testar for $\gamma = 0$ mot $\gamma > 0$, altså problem av typen H_1, A_1 . For dette føremålet vil vi arbeide under klassen av modellar definert ved (2.5). Ved å nytte transformasjonen

$$(2.6) \quad B\theta = v + \gamma u \quad (B, v \text{ og } u \text{ som i (2.5)})$$

i (2.4), får vi at \mathcal{P} må vere på formen

$$(2.7) \quad dP_{\theta} = a(\theta) \exp(\gamma(\theta)T(x) + \sum_{i=1}^2 \tau_i(\theta)Y_i(x)) dP_0$$

der $x = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22})'$ og γ gitt ved (2.6).

Setning 2. La X ha fordeling gitt ved (2.1) og la γ vere definert ved (2.6). For å teste $H: \gamma = 0$ mot $A: \gamma > 0$ så eksisterer det ein overalt sterkast styrkerett (O.A.S.S.) test δ med nivå ε . Testen er definert ved

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{når } T(x) > k(y_1, y_2) \\ \mu & \text{når } T(x) = k(y_1, y_2) \\ 0 & \text{når } T(x) < k(y_1, y_2) \end{cases}$$

der k og μ er gitt ved $E_H(\delta(X) | y_1, y_2) = \varepsilon$.

Prov: Setning 1 gir at føresetnadene i teorem 3 (kap. 4), Lehmann (1959) er oppfylt. Resultatet i Setning 2 følger da frå dette teoremet.

Vi har altså vist at for alle parametrar γ gitt ved (2.6) eksisterer det O.A.S.S. testar. For å nytte Setning 2 må vi derfor undersøke om den interessante parameteren γ kan skrivast på formen (2.6). Nedafor skal vi vise at dei mest kjende omgrepa i samband med tabellanalyse verkeleg tilfredsstillar (2.6).

Merk: Når B har rang 1, er det ikkje innført nokon restriksjon på parameterrommet. Da er $\mathcal{P}_{\gamma, B} = \mathcal{P}$. Dette er tilfelle for dei situasjonane som blir omtala i kapittel 3. Når B har rang 3, er apriorirestriksjonane slik

at vi blir kvitt plageparametrane i sannsynfordelinga (2.7). Setning 2 gjeld framleis, men med den endring at testen no blir overalt sterkast. I kap. 5 (side 28-29) har vi omtala ein slik situasjon.

3. Optimale testmetodar for ulike hypotesar i ein 2x2-tabell

Dei mest fruktbare og nytta omgrepa i tilknytning til analyse av 2x2-tabellar er uavhengigheit, symmetri, homogenitet og relativ symmetri. Desse omgrepa har ein presis matematisk definisjon uttrykt ved ulike funksjonar $\gamma(p)$ av parametrane p i modellen for tabellen. Nedafor skal vi vise kva slags informasjon desse ulike parameterfunksjonane kan gi oss. For desse γ -funksjonane har vi utvikla optimale testmetodar, som blir presentert saman med eksempel på bruk av dei.

3.1. Uavhengigheit

Dersom

$$P_{ij} = P_{i+} \cdot P_{+j} \quad i = 1,2; \quad j = 1,2$$

seier vi at variablane A og B (med respektive kategoriar A_1, A_2 og B_1, B_2) er stokastisk uavhengige. Det følgjer opplagt at dette er det same som at forholdet mellom kryssprodukta er lik 1, altså at

$$\alpha = \frac{P_{11} \cdot P_{22}}{P_{12} \cdot P_{21}} = 1.$$

Kryssproduktforholdet α blir også ofte omtala som oddsforholdet. Gitt kategori A_1 til variabel A, da er oddsen for å vere i kategori B_1 for variabel B lik P_{11}/P_{12} . Tilsvarende blir oddsen lik P_{21}/P_{22} når A har kategori A_2 . Kryssproduktforholdet er forholdet mellom odds,

$$(3.1) \quad \frac{P_{11}/P_{12}}{P_{21}/P_{22}} = \frac{P_{11} \cdot P_{22}}{P_{12} \cdot P_{21}} = \alpha.$$

Når $\alpha > 1$, kan vi derfor slå fast at førekomsten av B_1 relativt til B_2 er større under A_1 enn under A_2 .

Sidan

$$\alpha = \frac{(a_1 \cdot b_1 \cdot p_{11})(a_2 \cdot b_2 \cdot p_{22})}{(a_1 \cdot b_2 \cdot p_{12})(a_2 \cdot b_1 \cdot p_{21})}$$

har vi at α er invariant under transformasjonen

$$p_{ij} \rightarrow a_i \cdot b_j \cdot p_{ij}$$

for ei kvar mengd av dei positive tala $\{a_i\}$, $\{b_j\}$ som er slik at $\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 p_{ij} = 1$. Dette vil seie at α er eit mål for samspel, som ikkje blandar marginalinformasjon med samspelinformasjon.

Ved å nytte (2.3) får vi α uttrykt ved dei kanoniske parametrane $(\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{21})$, $\alpha = \exp(\theta_{11} - \theta_{12} - \theta_{21})$.

Ved å la $\gamma = \log \alpha$, dvs. $\theta_{11} = \gamma + \theta_{12} + \theta_{21}$, får vi for fordelingsklassen \mathcal{P} definert ved (2.4),

$$(3.2) \quad dP_{\theta} = a(\theta) \exp(x_{11}\gamma + x_{1+}\theta_{12} + x_{+1}\theta_{21}) dP_0.$$

Per derfor med i (2.5) der

$$B = (1, -1, -1), \quad v = 0, \quad u = 1$$

Frå Setning 2 følgjer da at testen som forkastar $H: \gamma = 0$ mot $A: \gamma > 0$ når

$$X_{11} > k(X_{1+}, X_{+1}),$$

er O.A.S.S. test med nivå ε . Denne testen er kjend under namnet Fisher-Irwins test. k vert fastsett slik at

$$\sum_{j=k+1}^{\min(x_{+1}, x_{1+})} g_1(j | x_{1+}, x_{+1}) + \mu g_1(k | x_{1+}, x_{+1}) = \varepsilon$$

der

$$g_1(x_{11} | x_{1+}, x_{+1}) = \frac{\binom{x_{+1}}{x_{11}} \binom{N-x_{+1}}{x_{1+}-x_{11}}}{\binom{N}{x_{1+}}}$$

og $0 \leq \mu \leq 1$.

I praksis forkastar vi hypotesen om uavhengigheit ($\gamma=0$), dersom dei observerte X_{11} , X_{1+} og X_{+1} er slik at

$$G_1(X_{11}^{-1} | X_{1+}, X_{+1}) = \sum_{j=0}^{X_{11}^{-1}} g_1(j | X_{1+}, X_{+1}) > 1-\varepsilon.$$

Eksempel 1. Tabellen nedafor er henta frå Ferieundersøkinga 1974. Den er ein kryssklassifikasjon mellom ein ferievariabel og ein innteksvariabel, for eit utval frå populasjonen av yrkesaktive mellom 45-74 år, som har gymnas, høgskule - eller universitetsutdanning og som bur i spreiddbygde strøk.

Tabell 1. Yrkesaktive mellom 45-74 år med gymnas, høgskule - eller universitetsutdanning som bur i spreiddbygde strøk fordelt etter ferieaktivitet og inntekt.

	Var på ferietur	Var ikkje på ferietur	Sum
Inntekt \geq 30 000	29	15	44
Inntekt $<$ 30 000	5	6	11
Sum	34	21	55

Vi ønskjer å finne ut om det er samanheng mellom ferieaktivitet og inntekt for denne folkegruppa ved å teste $\gamma = 0$ mot $\gamma > 0$, der $\gamma = \log \alpha$ og α er definert ved (3.1). For dette føremålet vil vi nytte Fisher-Irwins test med nivå $\varepsilon = 0.05$. Vi reknar ut $G_1(X_{11}^{-1} | X_{1+}, X_{+1})$ ved hjelp av program for hypergeometrisk fordeling og finn $G_1(28 | X_{1+}, X_{+1}) = 0.8171$. Vi får altså ikkje forkastning. Materialet i tabell 1 gir derfor ikkje grunnlag for å påstå positiv samanheng mellom inntekt og ferieturaktivitet.

3.2. Symmetri

Vi seier at vi har symmetri i ein 2x2-tabell, dersom

$$P_{12} = P_{21}.$$

Dette vil seie det same som at marginalsannsyna er like, dvs. $p_{i+} = p_{+i}$, $i=1,2$.

Dersom vi har data som er resultat frå ei panelundersøking, kan kvart individ i utvalet klassifiserast i forhold til same kreteriet på to ulike tidspunkt. Det kan da vere interessant å vurdere materialet i tabellen gjennom omgrepet symmetri. Vi vil da vere i stand til å avsløre om det har vore rørsle i populasjonen m.o.p. dette kreteriet. I Byrået vil det i samband med Arbeidskraftundersøkinga, vere naturleg å få avklart om

det er forskjell mellom sannsynet for overgang frå "ikkje-sysselsette" til "sysselsette" og sannsynet for overgang frå "sysselsette" til "ikkje-sysselsette". På tilsvarande måte kunne vi ha interesse av å undersøke pendling, kriminalitet, stemmegiving ved val, osv.

I denne situasjonen let vi

$$(3.3) \quad \gamma = \log \frac{p_{12}}{p_{21}} .$$

Yttrykt ved dei kanoniske parametrane gir dette

$$(3.4) \quad \gamma = \theta_{12} - \theta_{21} .$$

$\gamma = 0$ er ekvivalent med symmetri i tabellen. (3.4) innsett i (2.4) gir

$$(3.5) \quad dP_{\theta} = a(\theta) \exp(x_{12}\gamma + x_{11}\theta_{11} + (x_{21}+x_{12})\theta_{21}) dP_0$$

\mathcal{P} definert ved (3.5) er med i (2.5) der

$$B = (0, 1, -1), \quad v = 0, \quad u = 1.$$

Setning 2 gir da at testen som forkastar $H : \gamma = 0$ mot $A : \gamma > 0$ når

$$X_{12} > k(X_{11}, W), \quad W = X_{12} + X_{21}$$

er O.A.S.S. test med nivå ε .

Som vi skal sjå nedafor, er k berre avhengig av W . Derfor vert testen som forkastar $H : \gamma = 0$ mot $A : \gamma > 0$ når

$$X_{12} > k(W)$$

O.A.S.S. test med nivå ε .

Under H vert

$$\Pr(X_{12}=x_{12} | X_{11}=x_{11}, W=w) = \frac{\Pr(X_{11}=x_{11}, X_{12}=x_{12}, W=w)}{\Pr(X_{11}=x_{11}, W=w)} =$$

$$\frac{\frac{N!}{x_{11}! x_{12}! (w-x_{12})! (N-x_{11}-w)!} \left(\frac{p_{11}}{p_{22}}\right)^{x_{11}} \left(\frac{p_{21}}{p_{22}}\right)^w p_{22}^N}{\frac{N!}{x_{11}! w! (N-x_{11}-w)!} \left(\frac{p_{11}}{p_{22}}\right)^{x_{11}} \left(\frac{p_{21}}{p_{22}}\right)^w p_{22}^N} = \binom{w}{x_{12}} 2^{-w}.$$

Vi har dermed vist at k er uavhengig av X_{11} .

k vert fastsett slik at

$$\sum_{j=k+1}^w g_2(j|w) + \mu_2 g_2(k|w) = \epsilon$$

der

$$g_2(x_{12}|w) = \binom{w}{x_{12}} 2^{-w}, \quad x_{12} = 0, 1, \dots, w.$$

og $0 \leq \mu_2 \leq 1$. g_2 er altså den binomiske fordelinga med parametrar w og $\frac{1}{2}$.

I praksis forkastar vi hypotesen om symmetri dersom

$$G_2(X_{12}-1|W) = \sum_{j=0}^{X_{12}-1} g_2(j|W) > 1 - \epsilon,$$

der X_{12} og W er observasjonsverdiane i tabellen.

Eksempel 2. I tabellen nedafor har vi paneldata frå Arbeidskraftundersøkinga.

Tabell 2. Menn mellom 30-49 år (1977) med skolegang i 11-12 år, kryssklassifisert med omsyn på sysselsettingsstatus i 4. kvartal 1977 og 4. kvartal 1978.

4.kv.1978 \ 4.kv.1977	Sysselsett (S)	Ikkje sysselsett (\bar{S})	Sum
Sysselsett (S)	215	5	220
Ikkje sysselsett (\bar{S})	0	4	4
Sum	215	9	224

Vi ønskjer å finne ut om det for denne gruppa har vore fleire overgangar frå S til \bar{S} enn frå \bar{S} til S , dvs. om $p_{12} > p_{21}$. For å teste $H : p_{12} = p_{21}$ mot $A : p_{12} > p_{21}$ skal vi bruke den eksakte symmetritesten som er presentert ovafor. Vi krev at nivået skal vere $\varepsilon = 0.05$. I tabell for den binomiske fordelinga finn vi at $G_2(4|W) = 0.9687$, som er større enn $1 - \varepsilon = 0.9500$. Vi kan altså påstå at $p_{12} > p_{21}$, dvs. for gruppa menn mellom 30-49 år (1977) med skolegang i 11-12 år har vi hatt eit større tal overgangar frå S til \bar{S} enn frå \bar{S} til S .

3.3. Relativ symmetri

Dersom parametrane i 2×2 -tabellen oppfyller ein av samanhengane,

$$(3.6) \quad \frac{p_{12}}{p_{1+}} = \frac{p_{21}}{p_{2+}}, \quad \text{dvs.} \quad \frac{p_{11} \cdot p_{21}}{p_{12} \cdot p_{22}} = 1$$

eller

$$(3.7) \quad \frac{p_{12}}{p_{+2}} = \frac{p_{21}}{p_{+1}}, \quad \text{dvs.} \quad \frac{p_{11} \cdot p_{12}}{p_{21} \cdot p_{22}} = 1,$$

så har vi relativ symmetri i tabellen.

Testing av relativ symmetri, vil på same måte som for symmetri, vere interessant når vi har paneldata. I mange situasjonar vil vi finne det naturleg å studere betinga symmetri gitt forspalten eller hovudet i tabellen. Dette kan vi få gjort gjennom omgrepet relativ symmetri, definert ved respektive (3.6) og (3.7). I samband med stemmegivinga ved to val, kan vi f.eks. vere interessert i å undersøke det betinga sannsynet for overgang frå borgarlege til sosialistiske parti er like stort som frå sosialistiske til borgarlege. Vi kan da studere overgangane relativt resultatata frå det første valet (forspalten i tabellen) gjennom analyse av parameteren

$$(3.8) \quad \gamma = \log \frac{p_{11} \cdot p_{21}}{p_{12} \cdot p_{22}},$$

dvs. relativ symmetri ($\gamma=0$) definert ved 3.6).

Uttrykt ved dei kanoniske parametrane får vi for γ definert ved (3.8),

$$(3.9) \quad \gamma = \theta_{11} + \theta_{21} - \theta_{12}.$$

(3.9) sett inn i (2.4) gir

$$(3.10) \quad dP_{\theta} = a(\theta) \exp(x_{11}\gamma + x_{1+}\theta_{12} + (x_{21}-x_{11})\theta_{21})dP_0.$$

\mathcal{P} definert ved (3.10) er med i (2.5), der

$$B = (1, -1, 1), \quad v = 0, \quad u = 1.$$

Frå Setning 2 får vi derfor at testen som forkaster

$$H : \gamma = 0 (p_{12}/p_{1+} = p_{21}/p_{2+}) \text{ mot } A : \gamma > 0 (p_{12}/p_{1+} < p_{21}/p_{2+}) \text{ når}$$

$$X_{11} > k(X_{1+}, L), \quad L = X_{21} - X_{11}$$

er O.A.S.S. test med nivå ε . k vert fastsett slik at

$$\sum_{j=k+1}^{\min(x_{1+}, z)} g_3(j|x_{1+}, \ell) + \mu_3 g_3(k|x_{1+}, \ell) = \varepsilon$$

der

$$g_3(x_{11}|x_{1+}, \ell) = \Pr_{\gamma=0}(X_{11}=x_{11}|X_{1+}=x_{1+}, L=\ell) =$$

$$\frac{\Pr_{\gamma=0}(X_{11}=x_{11}, X_{1+}=x_{1+}, L=\ell)}{\Pr_{\gamma=0}(X_{1+}=x_{1+}, L=\ell)} =$$

$$\frac{N!}{x_{11}!(x_{1+}-x_{11})!(\ell+x_{11})!(N-x_{1+}-\ell-x_{11})!} \cdot p_{22}^N \cdot \left(\frac{p_{12}}{p_{22}}\right)^{x_{1+}} \left(\frac{p_{21}}{p_{22}}\right)^{\ell} =$$

$$\frac{\binom{N}{x_{1+}+\ell} \binom{N}{x_{1+}} p_{22}^N \left(\frac{p_{12}}{p_{22}}\right)^{x_{1+}} \left(\frac{p_{21}}{p_{22}}\right)^{\ell}}{\binom{N}{x_{1+}}}$$

$$\frac{\binom{N-x_{1+}-\ell}{x_{11}} \binom{x_{1+}+\ell}{x_{1+}-x_{11}}}{\binom{N}{x_{1+}}} = \frac{\binom{z}{x_{11}} \binom{N-z}{x_{1+}-x_{11}}}{\binom{N}{x_{1+}}},$$

$$z = N - x_{1+} - \ell = x_{11} + x_{22}.$$

I praksis forkastar vi hypotesen om relativ symmetri definert ved (3.6), dersom

$$G_3(X_{11}^{-1} | X_{1+}, L) = \sum_{j=0}^{X_{11}^{-1}} g_3(j | X_{1+}, L) > 1 - \epsilon,$$

der X_{1+} og L er respektive sum og differens av observerte verdier i tabellen, og X_{11} er observasjonsverdien i celle (A_1, B_1) .

Eksempel 3. Også i dette eksemplet skal vi nytte paneldata frå Arbeidskraftundersøkinga.

Tabell 3. Menn mellom 25-29 år med skolegang i 11-12 år, kryssklassifisert etter sysselsettingsstatus i 4. kvartal 1977 og 4. kvartal 1978.

4. kv. 1978	Sysselsett (S)	Ikkje sysselsett (\bar{S})	Sum
4. kv. 1977			
Sysselsett (S)	65	1	66
Ikkje sysselsett (\bar{S})	5	3	8
Sum	70	4	74

Om vi no ønskte å studere tabell 3 på same måte som tabell 2, ville vi med 5% nivå finne at materialet ikkje gir grunnlag for å forkaste hypotesen om symmetri.

Vi vil i staden basere analysen av tabellen på "relativ symmetri" definert ved (3.6). Ved å nytte den eksakte testen med 5% nivå, får vi $G_3(64 | X_{1+}, L) = 1.000$. Dermed får vi forkastning og kan påstå $p_{21}/p_{2+} > p_{12}/p_{1+}$, dvs. det relative talet på overgangar frå \bar{S} til S er større enn det relative talet på overgangar frå S til \bar{S} .

Den andre forma for relativ symmetri (definert ved (3.7)), vil vere aktuell når vi vil vurdere overgangane relativt verdiane i hovudet. Vi skal teste relativ symmetri definert ved (3.7) ved hjelp av parameteren

$$(3.11) \quad \gamma = \log \frac{p_{11} \cdot p_{12}}{p_{21} \cdot p_{22}} = \theta_{11} + \theta_{12} - \theta_{21}.$$

På tilsvarande måte som for (3.8), finn vi at testen som forkastar $H : \gamma = 0$ ($p_{12}/p_{+2} = p_{21}/p_{+1}$) mot $A : \gamma > 0$ ($p_{12}/p_{+2} > p_{21}/p_{+1}$) når

$X_{11} > k(X_{+1}, T)$; $T = X_{12} - X_{11}$, er O.A.S.S. med nivå ϵ .

I praksis forkastar vi hypotesen om relativ symmetri definert ved (3.7), dersom

$$G_4(X_{11}^{-1} | X_{+1}, T) = \sum_{j=0}^{X_{11}-1} g_4(j | X_{+1}, T) > 1 - \epsilon,$$

der X_{11} , X_{+1} og T er observerte verdier og g_4 er gitt ved

$$g_4(X_{11} | X_{+1}, T) = \frac{\binom{N-X_{+1}-T}{X_{11}} \binom{X_{+1}+T}{X_{+1}-X_{11}}}{\binom{N}{X_{+1}}} = \frac{\binom{Z}{X_{11}} \binom{N-Z}{X_{+1}-X_{11}}}{\binom{N}{X_{+1}}}$$

der $Z = N - X_{+1} + T = X_{11} + X_{22}$.

Som vi ser av g_3 og g_4 , er dei to testane vi har etablert for relativ symmetri analoge med Fisher-Irwins test for uavhengigheit.

Vi har ovafor omtalt nytten av omgrepet relativ symmetri, når tabellen er resultat av ei multinomisk forsøkkrekke. Hvis tabellen er resultat av to binomiske forsøkkrekker, vil det framleis vere meningsfullt å studere relativ symmetri. Vi har da at verdiane i forspalten eller hovudet er gitte ikkje-stokastiske storleiker. Vi kjem nærare tilbake til dette i kapittel 3.4.

Som det går fram av kapitla 3.2. og 3.3., vil både symmetri og relativ symmetri vere meningsfulle omgrep i samband med analyse av paneldata. Når vi ikkje har paneldata, er det kun meningsfullt å drive symmetristudier ved hjelp av omgrepet relativ symmetri.

3.4. Homogenitet

I dette avsnittet vil vi sjå på 2x2-tabellen som resultat av to binomiske forsøkkrekker, der verdiane til kjenneteiknet i forspalten er gitte. Ved å la $X_{1+} = N_1$ og $X_{2+} = N_2$, får vi for tabellen på side 6

	B_1	B_2	Sum
A_1	X_{11}	$N_1 - X_{11}$	N_1
A_2	X_{21}	$N_2 - X_{21}$	N_2
Sum	X_{+1}	$N - X_{+1}$	N

der X_{11} og X_{21} er binomiske fordelte med underliggjande parametrar

	B ₁	B ₂	Sum
A ₁	p ₁	1-p ₁	1
A ₂	p ₂	1-p ₂	1

der $p_i = \Pr(B_1 | A_i)$, $1-p_i = \Pr(B_2 | A_i)$; $i = 1, 2$.

Vi får derfor for simultanfordelinga til X-ane

$$(3.12) \quad \Pr(X_{11}=x_{11}, X_{21}=x_{21}) = \binom{N_1}{x_{11}} p_1^{x_{11}} (1-p_1)^{N_1-x_{11}} \binom{N_2}{x_{21}} p_2^{x_{21}} (1-p_2)^{N_2-x_{21}}$$

eller

$$(3.13) \quad dP_\theta = 2^N \cdot (1+\exp\theta_1)^{-N_1} (1+\exp\theta_2)^{-N_2} \exp(x_{11}\theta_1 + x_{21}\theta_2) dP_0$$

der P_0 er sannsynfordelinga svarande til $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$. $\theta_i = \log \frac{p_i}{1-p_i}$, $i=1, 2$.

(3.13) er den minimalkanoniske representasjon av fordelingsklassen definert ved (3.12).

Vi ønskjer å teste hypotesen om homogenitet $H : p_1 = p_2$ mot $A : p_1 > p_2$. Uttrykt ved dei kanoniske parametrane θ_1 og θ_2 , vil dette seie det same som å teste $H : \theta_1 = \theta_2$ mot $A : \theta_1 > \theta_2$.

Setning 1 og Setning 2 gjeld også for fordelingsklassen \mathcal{P} definert ved (3.13). B er da ei rx_2 -matrise med rang r , $r=1,2$. Ved å nytte Setning 2 med $\gamma = \theta_1 - \theta_2$, får vi at testen som forkastar H mot A når

$$X_{11} > k(X_{+1})$$

er O.A.S.S. med nivå ε . I denne situasjonen er $B = (1, -1)$, $v=0$ og $u=1$.

Ved bruk av testen, går vi fram på følgjande måte:

Forkast H dersom dei observerte verdiane i tabellen, X_{11} og X_{21} , er slik at

$$G_5(X_{11}-1 | X_{+1}) = \sum_{j=0}^{X_{11}-1} g_5(j | X_{+1}) > 1-\varepsilon,$$

der

$$g_5(X_{11} | X_{+1}) = \frac{\binom{X_{+1}}{X_{11}} \binom{N-X_{+1}}{N_1-X_{11}}}{\binom{N}{N_1}}.$$

La oss tenkje oss at vi er interessert i å teste $H : p_1 = p_2$ mot $A : p_1 > p_2$ under modellen gitt på side 6; dvs. når X_{1+} og X_{2+} er stokastiske. Vi har følgjande samanheng mellom p_1 , p_2 og parametrene p_{11} , p_{12} , p_{21} , p_{22} definert på side 6,

$$p_1 = \frac{p_{11}}{p_{1+}}, \quad p_2 = \frac{p_{21}}{p_{2+}}.$$

Å teste $p_1 = p_2$ under modellen definert på side 6, blir derfor det same som å teste

$$\frac{p_{11}}{p_{1+}} = \frac{p_{21}}{p_{2+}} \Leftrightarrow \frac{p_{11} \cdot p_{22}}{p_{12} \cdot p_{21}} = 1,$$

dvs. uavhengigheit i 2x2-tabellen. Vi har dermed vist at det er ingen praktisk forskjell på å teste $p_1 = p_2$ under dei to ulike modellane (2.1) og (3.12), men vi bør merke oss at styrkefunksjonane til dei to testane ikkje er identiske.

I samband med handsaminga av relativ symmetri (kap. 3.3.), peika vi på at dette omgrepet hadde særleg interesse når marginalane i hovudet eller forspalten var gitte. Når vi ser på forspalten som gitt, er fordelinga til observasjonane i tabellen gitt ved (3.12).

Testprosedyren for relativ symmetri (3.6) basert på den O.A.S.S. testen under modellen (3.12), fell saman med den prosedyren vi presenterte for (3.6) i kap. 3.3. X_{1+} er da ein gitt ikkje-stokastisk storleik. Tilsvarende finn vi at testprosedyren for relativ symmetri (3.7), når marginalane i hovudet er gitte, blir den vi har etablert for (3.7) i kap. 3.3. I denne situasjonen blir X_{+1} ein gitt ikkje-stokastisk storleik.

Dei vanlegaste tabellane ved Intervjuavdelinga viser korleis einingar i ulike grupper fordeler seg m.o.p. eit kjennemerke. Dersom vi har to grupper som skal samanliknast m.o.p. eit kjennemerke med to kategoriar, får vi altså den 2x2-tabellen som er omtala innleiingsvis i dette kapitlet. Vi skal no gi eit eksempel på ein slik tabell.

Eksempel 4. Vi vil undersøke om organisasjonsaktiviteten blant mannlege pendlarar med medlemskap i ein eller annan organisasjon, varierer med pendlarstatusen. Ved å nytte data frå Levekårsundersøkinga 1973 får vi tabellen.

Tabell 4. Mannlege lønstakarar som er medlemar av ein eller annan organisasjon, i grupper for pendlarstatus etter organisasjonsaktivitet.

	Aktive	Passive	Sum
Veke- og langtidspendlarar	8	15	23
Dagpendlarar	7	22	29
Sum	15	37	52

Vi ønskjer altså å teste hypotesen $H : p_1 = p_2$ mot alternativa $A : p_1 > p_2$. Til dette vil vi nytte den betingta testen som er omtala tidlegare i dette kapitlet. Vi krev nivået $\varepsilon = 0.05$, og finn at $G_5(7|X_{+1}) = 0.7039 < 0.9500$. Vi får altså ikkje forkastning og kan dermed ikkje påstå at det er forskjell i organisasjonsaktiviteten mellom dei to pendlargruppene.

Eksempel 5. Dersom marginaltala i tabell 2 var framkomne som resultat av to uavhengige utvalsundersøkingar, ville vi få tabellen

Tabell 5. Menn mellom 30-49 år (1977) med skolegang i 11-12 år, fordelt etter sysselsettingsstatus i 4. kvartal 1977 og 4. kvartal 1978.

	Sysselsett (S)	Ikkje sysselsett (\bar{S})	Sum
4. kvartal 1977	220	4	224
4. kvartal 1978	215	9	224
Sum	435	13	448

Ved å studere homogenitet for denne tabellen; dvs. $p_1' = p_2'$ der $p_1' = \Pr(S \text{ i 4. kv. 1977})$ og $p_2' = \Pr(S \text{ i 4. kv. 1978})$, skulle vi oppnå tilsvarende tolkning som for symmetri i eksempel 2 (sjå merk). Vi vil nytte den eksakte homogenitetstesten med nivå $\varepsilon = 0.05$, og finn $G_5(219|X_{+1}) = 0.8701$. Vi får altså ikkje forkastning av homogenitetshypotesen.

Merk: Som vi peika på i innleiinga til kapittel 3.4., blir symmetri i ein 2x2-tabell ekvivalent med at $p_{i+} = p_{+i}$, $i=1, 2$. Vi får for p_1' og p_2' uttrykt ved parametrane i modellen for tabell 2,

$$p_1' = p_{1+}, \quad p_2' = p_{+1}.$$

Sidan $p_{1+} + p_{2+} = p_{+1} + p_{+2} = 1$, har vi derfor at

$$p_{1+}' = p_{2+}'$$

\Leftrightarrow

$$p_{i+} = p_{+i}, \quad i = 1, 2.$$

Dette vil seie at vi oppnår same tolkning ved å studere homogenitet for tabell 5 som symmetri for tabell 2.

I eksempel 2 tok vi vare på den ekstra informasjonen materialet har som paneldata. Vi oppnådde i motsetnad til ovafor forkastning av hypotesen og dermed signifikant utsegn.

4. Asymptotiske metodar

Som vi peika på i innleiinga, er dei fleste metodar for analyse av kategoriske data utvikla under føresetnad av at talet på observasjonar er "stort"; metodane er asymptotiske. Nedafor skal vi presentere dei asymptotiske utgåvene av metodane gitt i kap. 3. Desse kan vere nyttige når materialet er så stort, at dei eksakte metodane blir reknemessig for ressurskrevjande.

(i) Uavhengigheit (kap. 3.1.)

Vi forkastar hypotesen om uavhengigheit, $H : \gamma = 0$ mot $A : \gamma > 0$ når

$$\frac{X_{11} - X_{1+} \frac{X_{+1}}{N} - \frac{1}{2}}{\left(X_{1+} \frac{X_{2+} X_{+1}}{N-1} \frac{X_{+1}}{N} \left(1 - \frac{X_{+1}}{N} \right) - \frac{1}{12} \right)^{1/2}} \geq k_{1-\epsilon},$$

der k tilfredsstillar $\Phi(k_{1-\epsilon}) = 1-\epsilon$. Denne metoden er nyttig når N er stor. Numeriske utrekningar viser at metoden er brukbar når

$$X_{1+} \frac{X_{+1}}{N}, \quad X_{1+} \frac{X_{+2}}{N}, \quad X_{2+} \frac{X_{+1}}{N}, \quad \text{og} \quad X_{2+} \frac{X_{+2}}{N} \geq 5.$$

$\Phi(\cdot)$ er den kumulative fordelingsfunksjon til den standardiserte normalfordelinga.

(ii) Symmetri (kap. 3.2.)

Vi forkastar hypotesen om symmetri $H : \gamma = 0$ mot $A : \gamma > 0$ når

$$\frac{X_{12} - \frac{1}{2}W - \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{4}W - \frac{1}{12}\right)^{\frac{1}{2}}} \geq k_{1-\varepsilon}$$

dvs.

$$\frac{X_{12} - X_{21} - 1}{\left(X_{12} + X_{21} - \frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}} \geq k_{1-\varepsilon},$$

der $k_{1-\varepsilon}$ er slik at $\Phi(k_{1-\varepsilon}) = 1-\varepsilon$. Metoden er brukbar når

$$X_{12} + X_{21} \geq 10.$$

(iii) Relativ symmetri (kap. 3.3.)

Vi forkastar hypotesen om relativ symmetri (3.6) $H : \gamma = 0$ mot $A : \gamma > 0$ når

$$\frac{X_{11} - X_{1+} \frac{Z}{N} - \frac{1}{2}}{\left(X_{1+} \frac{X_{2+}}{N-1} \frac{Z}{N} \left(1 - \frac{Z}{N}\right) - \frac{1}{12}\right)^{\frac{1}{2}}} \geq k_{1-\varepsilon}$$

der $Z = X_{11} + X_{22}$ og $k_{1-\varepsilon}$ er slik at $\Phi(k_{1-\varepsilon}) = 1-\varepsilon$.
Metoden er brukbar når

$$Z \frac{X_{1+}}{N}, Z \frac{X_{2+}}{N}, (N-Z) \frac{X_{1+}}{N}, (N-Z) \frac{X_{2+}}{N} \geq 5.$$

Ved testing av relativ symmetri (3.7), får vi forkastning når

$$\frac{X_{11} - X_{+1} \frac{Z}{N} - \frac{1}{2}}{\left(X_{+1} \frac{X_{+2}}{N-1} \frac{Z}{N} \left(1 - \frac{Z}{N}\right) - \frac{1}{12}\right)^{\frac{1}{2}}} \geq k_{1-\varepsilon}.$$

Metoden er brukbar når

$$Z \frac{X_{+1}}{N}, Z \frac{X_{+2}}{N}, (N-Z) \frac{X_{+1}}{N}, (N-Z) \frac{X_{+2}}{N} \geq 5.$$

Resultata ovafor, (i), (ii) og (iii), er etablerte ved hjelp av Sentralgrenseteoremet. Sidan desse metodane er kontinuerlege tilnærmingar av dei diskrete metodane vi presenterte i kap. 3, har vi gjort nytte av kontinuitetskorreksjonar. Når vi har små utval, gir dette ei kraftig betring av presisjonen til dei tilnærma metodane. $\frac{1}{2}$ er den velkjende forventningskorreksjon til Fisher-Yate, medan $1/12$ er Sheppard-korreksjonen for variansen. Kontinuitetskorreksjonar er blitt grundig handsama i Hajek & Sidak (1967).

Dei tilnærma metodane (i), (ii) og (iii) er alle utvikla under modellen (2.1); det vil seie når begge kjennetegna i tabellen er stokastiske. Prosedyren (i) kan nyttast til homogenitetstesting når modellen er gitt ved (3.12). Da er $X_{1+} = N_1$ og $X_{2+} = N_2$ ikkje-stokastiske storleikar. Tilsvarande kan vi nytte prosedyrane i (iii) til å teste relativ symmetri når anten marginalane i forspalten (modell (3.12)) eller marginalane i hovudet er gitte. Da er respektive X_{1+} , X_{2+} og X_{+1} , X_{+2} gitte ikkje-stokastiske storleiker.

5. Effektivitetsegenskapar til Fisher-Irwins test

Når rammekrava er dei einaste restriksjonane på parametrane i modellen for 2x2-tabellen, veit vi at Fisher-Irwins test (ϕ_1) som forkastar

$$H : p_{1+} p_{+1} = p_{11} \quad \text{mot} \quad A : p_{1+} p_{+1} < p_{11} \quad \text{når}$$

$$X_{11} > k (X_{1+}, X_{+1}),$$

er overalt sterkast blant alle styrkerette testar med nivå ε .

I dette kapitlet skal vi vurdere effektiviteten til Fisher-Irwins test i ein situasjon, der vi har fleire restriksjonar enn rammekrava på parametrane i modellen.

Nedafor skal vi først finne eit tilnærma uttrykk for styrkefunksjonen til ϕ_1 .

Frå teorem 14.3-4, Bishop, Fienberg and Holland (1975), får vi at (X_{11}, X_{1+}, X_{+1}) har ein tilnærma multinormal fordeling med forventning ξ og kovariansmatrise Σ , der $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)' = (Np_{11}, Np_{1+}, Np_{+1})'$ og

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Np_{11}(1-p_{11}) & Np_{11}p_{2+} & Np_{11}p_{+2} \\ Np_{11}p_{2+} & Np_{1+}(1-p_{1+}) & N(p_{11}-p_{1+}p_{+1}) \\ Np_{11}p_{+2} & N(p_{11}-p_{1+}p_{+1}) & Np_{+1}(1-p_{+1}) \end{pmatrix}$$

Vi har da at

$$\Sigma_{22}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{p_{+1}(1-p_{+1})}{Nd} & -\frac{p_{11}-p_{1+}p_{+1}}{Nd} \\ -\frac{p_{11}-p_{1+}p_{+1}}{Nd} & \frac{p_{1+}(1-p_{1+})}{Nd} \end{pmatrix}$$

der $d = p_{22}p_{+1}p_{1+} - p_{11}(p_{11}-p_{+1}p_{1+})$ ($d \neq 0$), og videre at

$$\Sigma'_{12}\Sigma_{22}^{-1} = \left(\frac{p_{11}p_{21}p_{+2}}{d}, \frac{p_{11}p_{12}p_{2+}}{d} \right) \stackrel{\text{def.}}{=} (u_1, u_2)$$

og

$$\Sigma'_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} = \frac{N}{d}(p_{11}^2(1-p_{1+})(1-p_{+1})(1-p_{11}-p_{22})).$$

Det er velkjent (sjå Anderson (1958)) at

$$\begin{aligned} E(X_{11}|X_{1+}, X_{+1}) &\approx \xi_1 + \Sigma'_{12}\Sigma_{22}^{-1} \begin{pmatrix} X_{1+} - \xi_2 \\ X_{+1} - \xi_3 \end{pmatrix} \\ &= Np_{11} + u_1(X_{1+} - Np_{1+}) + u_2(X_{+1} - Np_{+1}) \stackrel{\text{def.}}{=} \mu_1 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} \text{var}(X_{11}|X_{1+}, X_{+1}) &\approx \sigma_{11} - \Sigma'_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} \\ &= Np_{11}(1-p_{11}) - \frac{N}{d}(p_{11}^2p_{2+}p_{+2} \cdot (1-p_{11}-p_{22})) \stackrel{\text{def.}}{=} \sigma_1^2. \end{aligned}$$

La

$$\mu_0 = E_H(X_{11}|X_{1+}, X_{+1}) = X_{1+} \frac{X_{+1}}{N}$$

og

$$\sigma_0^2 = \text{var}_H(X_{11}|X_{1+}, X_{+1}) = X_{1+} \frac{X_{2+}}{N-1} \frac{X_{+1}}{N} \left(1 - \frac{X_{+1}}{N}\right).$$

La p_{12} og p_{21} vere slik at

$$(5.1) \quad p_{1+} p_{+1} = -\frac{C}{\sqrt{N}} + p_{11},$$

der p_{11} og p_{22} er faste.

C er ein parameter som uttrykker mengda av alternativ. Vi får da følgjande tilnærma uttrykk for styrkefunksjonen til ϕ_1 der

$$p = (p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22})',$$

$$\begin{aligned} (5.2) \quad \beta(\phi_1, p) &= E[\Pr(X_{11} > k_N(X_{1+}, X_{+1}) | X_{1+}, X_{+1})] \\ &= E[\Pr(\frac{X_{11} - \mu_0}{\sigma_0} > k'_N(X_{1+}, X_{+1}) | X_{1+}, X_{+1})] \\ &= E[\Pr(\frac{X_{11} - \mu_1}{\sigma_1} > k'_N(X_{1+}, X_{+1}) \frac{\sigma_0}{\sigma_1} - \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_1} | X_{1+}, X_{+1})] \\ &\approx E\Phi(-k'_N(X_{1+}, X_{+1}) \frac{\sigma_0}{\sigma_1} + \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_1}) \\ &\approx \Phi(k_\varepsilon + \frac{C}{(p_{11} p_{22})^{\frac{1}{2}}}) \end{aligned}$$

der k_ε vert fastsett ved likninga

$$\Phi(k_\varepsilon) = \varepsilon.$$

Under utviklinga av resultatet i (5.2) har vi gjort bruk av Lemma 5.1 og Lemma 5.2.

Lemma 5.1. La p_{12} og p_{21} vere slik at (5.1) er tilfredsstilt. Da vil

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_1} \frac{p}{N \rightarrow \infty} > 1.$$

Prov. (5.1) gir at

$$p_{2+} p_{+2} = -\frac{C}{\sqrt{N}} + p_{22}.$$

For store N er $d \approx p_{11} p_{22}$. Ved å nytta Slutskys setning får vi da

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_0}{\sigma_1} &= \left(\frac{X_{+1} \frac{X_{+2}}{N-1} \frac{X_{1+}}{N} \left(1 - \frac{X_{+1}}{N}\right)}{N p_{11} (1-p_{11}) - \frac{N}{d} (p_{11}^2 p_{2+} p_{+2} (1-p_{11}-p_{22}))} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\approx \left(\frac{p_{+1} p_{+2} p_{1+} p_{2+}}{p_{11} (1-p_{11}) - \frac{1}{d} (p_{11}^2 p_{2+} p_{+2} (1-p_{11}-p_{22}))} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\approx \left(\frac{p_{11} p_{22}}{p_{11} (1-p_{11}) - \frac{p_{11}^2 p_{22} (1-p_{11}-p_{22})}{p_{22} p_{11}}} \right)^{\frac{1}{2}} = 1. \end{aligned}$$

Lemma 5.2. La p_{12} og p_{21} vere slik at (5.1) er oppfylt. Da har vi at

$$\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_1} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{P} \frac{C}{(p_{11} p_{22})^{\frac{1}{2}}}$$

Prov. (5.1) gir at $p_{2+} p_{+2} = -\frac{C}{\sqrt{N}} + p_{22}$. La

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{N}} \sigma_1 = \left[p_{11} (1-p_{11}) - \frac{1}{d} (p_{11}^2 p_{2+} p_{+2} (1-p_{11}-p_{22})) \right]^{\frac{1}{2}}$$

og

$$L_N(X_{1+}, X_{+1}) = \sqrt{N} \left[u_1 \left(\frac{X_{1+}}{N} - p_{1+} \right) + u_2 \left(\frac{X_{+1}}{N} - p_{+1} \right) - \frac{X_{1+}}{N} \frac{X_{+1}}{N} + p_{11} \right].$$

Sidan

$$\tau \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} (p_{11} p_{22})^{\frac{1}{2}}$$

får vi ved å nytte Lemma 5.3

$$\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_1} = \frac{L_N(X_{1+}, X_{+1})}{\tau} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{P} \frac{C}{(p_{11} p_{22})^{\frac{1}{2}}}.$$

Lemma 5.3. La p_{12} og p_{21} vere slik at (5.1) er oppfylt. Da vil

$$L_N(X_{1+}, X_{+1}) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{P} C.$$

Prov. Ved å skrive om uttrykket for $L_N(X_{1+}, X_{+1})$ får vi

$$\begin{aligned} L_N(X_{1+}, X_{+1}) &= \sqrt{N} (u_1 - p_{+1}) \left(\frac{X_{1+}}{N} - p_{1+} \right) + \sqrt{N} (u_2 - p_{1+}) \left(\frac{X_{+1}}{N} - p_{+1} \right) \\ &- \sqrt{N} \left(\frac{X_{1+}}{N} - p_{1+} \right) \left(\frac{X_{+1}}{N} - p_{+1} \right) - \sqrt{N} (p_{1+} p_{+1} - p_{11}) \\ &= v_{1N} Z_{1N} + v_{2N} Z_{2N} - \frac{1}{\sqrt{N}} Z_{1N} Z_{2N} + C \end{aligned}$$

der

$$v_{1N} = u_1 - p_{+1}, \quad v_{2N} = u_2 - p_{1+}$$

og

$$Z_{1N} = \sqrt{N} \left(\frac{X_{1+}}{N} - p_{1+} \right), \quad Z_{2N} = \sqrt{N} \left(\frac{X_{+1}}{N} - p_{+1} \right).$$

Sidan

$$N^{1/4} \left(\frac{X_{1+}}{N} - p_{1+} \right) \xrightarrow{P} 0, \quad N^{1/4} \left(\frac{X_{+1}}{N} - p_{+1} \right) \xrightarrow{P} 0$$

gir Slutskys setning at

$$\frac{1}{\sqrt{N}} Z_{1N} Z_{2N} \xrightarrow{P} 0.$$

Sidan $d \cong p_{11} p_{22}$ for store N , får vi

$$v_{1N} \cong \frac{1}{p_{22}} (p_{21} p_{12} - p_{11} p_{22}) = \frac{1}{p_{22}} (p_{1+} p_{+1} - p_{11}) \cong 0$$

og

$$v_{2N} \cong \frac{1}{p_{22}} \begin{pmatrix} p_{12} & p_{21} \\ p_{11} & p_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{p_{22}} (p_{1+} p_{+1} - p_{11}) \cong 0.$$

Vi har at

$$\text{var } Z_{1N} = p_{1+}(1-p_{1+}), \quad \text{var } Z_{2N} = p_{+1}(1-p_{+1}).$$

Sidan $0 < p_{1+}, p_{+1} < 1$, får vi ved bruk av Tsebysheffs ulikskap at

$$v_{iN} Z_{iN} \xrightarrow{P} 0, \quad i=1,2.$$

Dermed får vi ved bruk av Slutskys setning at

$$L_N(X_{1+}, X_{+1}) \xrightarrow{P} C.$$

La oss no tenkje oss at vi har ein situasjon, der vi på førehand veit at

$$p_{11} = p_{22}, \quad p_{12} = p_{21}.$$

Dette blir ekvivalent med at det er både relativ symmetri (3.6) og (3.7) i tabellen. Sidan $p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22} = 1$ blir $p_2 = 1/2 - p_1$, der $p_{11} = p_{22} = p_1$ og $p_{12} = p_{21} = p_2$.

Vi tenkjer oss ei undersøking av synsevnen til ei særskilt gruppe i folket på grunnlag av eit tilfeldig utval på M personar. For kvar av dei M personane utfører vi målingar, som slår fast om venstre auge (V.A.) og høgre auge (H.A.) er godt (G) eller dårleg (D). Vi får da ei multinomisk fordeling med parametrane

		H.A.		
		G	D	SUM
V.A.	G	p_1	$\frac{1}{2} - p_1$	$\frac{1}{2}$
	D	$\frac{1}{2} - p_1$	p_1	$\frac{1}{2}$
	SUM	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

I denne situasjonen er $p_{12} = p_{21}$ ein rimeleg føresetnad, medan $p_{11} = p_{22}$ er meir tvilsam. Vi vel likevel å tru på begge føresetnadene. Under denne modellen ønskjer vi å finne ut om synsevnen til venstre auge er uavhengig av synsevnen til høgre auge; dvs. uavhengigheit i 2×2 -tabellen. For å gi svar på dette skal vi teste

$$H : p_1 = 1/4 \quad \text{mot} \quad A : p_1 > 1/4.$$

Ved å nytte Neyman-Pearsons setning finn vi at testen (ϕ_1^*) som forkastar H mot A når

$$V = X_{11} + X_{22} > k$$

er overalt sterkast med nivå ϵ .

For å etablere denne testen kunne vi ha nytta resultatata frå kap. 2 med

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad u = (1, 0, 0)' \quad \text{og} \quad v = (0, 0, 0)'.$$

Vi har opplagt at

$$V \sim \text{binomisk}(M, 2p_1)$$

$$\text{der} \quad X_{11} + X_{12} + X_{21} + X_{22} = M.$$

For å teste H mot A , kunne vi også ha teke i bruk Fisher-Irwins test (ϕ_1) . Sidan testen ϕ_1^* er overalt sterkast, veit vi at bruk av ϕ_1 i denne situasjonen ville medføre styrketap. Spørsmålet blir da om styrketapet er stort eller lite? For å skaffe oss informasjon som kan gi svar på dette spørsmålet, skal vi finne Pitman-effesiensen $e(\phi_1, \phi_1^*)$ til ϕ_1 med omsyn på ϕ_1^* .

e er eit summarisk mål for forskjell i effektivitet mellom to testar og er definert ved

$$(5.3) \quad e = e(\phi_1, \phi_1^*) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{r_N}{N}$$

der p_{1N} er ein sekvens av alternativ slik at $\beta(\phi_{1N}, p_{1N}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \gamma$,

$$M = r_N \text{ er ein sekvens slik at } \beta(\phi_{1r_N}^*, p_{1N}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \gamma,$$

og begge testane har same nivå ε . Indeksane N og r_N gir uttrykk for at testane ϕ_1 og ϕ_1^* treng respektive N og r_N observasjonar for å oppnå same styrke γ , når begge har nivå ε .

La

$$(5.4) \quad p_1 = p_{1N} = \frac{C}{\sqrt{N}} + \frac{1}{4}$$

Da får vi følgjande tilnærma uttrykk for styrkefunksjonen til ϕ_1^*

$$\begin{aligned} (5.5) \quad \beta(\phi_{1r_N}^*, p_{1N}) &= \Pr(V > k_{r_N}) = \Pr\left(\frac{V - \frac{1}{2}r_N}{\frac{1}{2}\sqrt{r_N}} > k'_{r_N}\right) \\ &= \Pr\left(\frac{V - 2r_N p_{1N}}{(2r_N p_{1N}(1-2p_{1N}))^{\frac{1}{2}}}\right) > \frac{k'_{r_N} \frac{1}{2}\sqrt{r_N} + r_N(\frac{1}{2} - 2p_{1N})}{(2r_N p_{1N}(1-2p_{1N}))^{\frac{1}{2}}}\right) \\ &\approx \Phi(k_\varepsilon + \sqrt{r_N}(4p_{1N} - 1)) \\ &\approx \Phi(k_\varepsilon + \sqrt{e}\sqrt{N}(4p_{1N} - 1)) = \Phi(k_\varepsilon + 4C\sqrt{e}) \end{aligned}$$

der k_ε er slik at $\Phi(k_\varepsilon) = \varepsilon$.

Under utviklinga av (5.5), har vi gjort bruk av (5.3), (5.4) og kjennskapet til at normalfordelinga er grensefordeling til den binomiske fordelinga.

Derfor får vi at $k'_{r_N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} k_{1-\varepsilon} = -k_\varepsilon$.

Sidan $p_{11} = p_{22} = p_1$, får vi frå (5.4) at

$$(p_{11} p_{22})^{\frac{1}{2}} = p_{1N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{4}.$$

Dette gir vidare for styrkefunksjonen (5.2) til ϕ_1

$$\beta(\phi_{1N}, p_{1N}) \approx \Phi(k_\varepsilon + 4C)$$

Pittmaneffesiensten er da gitt ved likninga

$$\Phi(k_\varepsilon + 4C\sqrt{e}) = \Phi(k_\varepsilon + 4C).$$

Vi får derfor

$$e(\phi_1, \phi_1^*) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{r_N}{N} = 1.$$

Dette vil seie at testane ϕ_1 og ϕ_1^* er asymptotisk ekvivalente.

Sidan $e = 1$, vil vi kunne få viktig tilleggsinformasjon om effektiviteten til dei to testane ved å studere deffesiensten

$$d_N = N - r_N$$

og den asymptotiske deffesiensten

$$d = \lim_{N \rightarrow \infty} d_N$$

Desse omgrepa blei innførte av Hodges, J.L. & Lehmann, E.L. (1970). Dersom $e \neq 1$ har vi $d_N \approx (1-e)N$ og dermed ville ytterligere informasjon frå d_N bli lite avslørande. Om vi som ovafor har at $e = 1$, da kan d_N vere alt frå $o(1)$ til $\overline{O}(N)$. I dette tilfellet vil derfor den informasjon d_N gir om forskjellen i effektivitet eller prestasjonsevne mellom dei to testane vere meir avslørande.

For å skaffe oss informasjon om d_N , treng vi eksakte utrekningar av styrkefunksjonane for dei to testane. Da dette blir relativt ressurskrevjande for Fisher-Irwins test (ϕ_1), har vi funne det naturleg å ta i bruk eksisterande resultat om eksakte styrkeutrekningar for den to-sidige utgåva av Fisher-Irwins test. Nedafor vil vi derfor gi ei samanlikning av dei to-sidige utgåvene av testane ϕ_1 og ϕ_1^* , som altså er testmetodar for å teste hypotesen $p_1 = \frac{1}{4}$ mot alternativa $p_1 \neq \frac{1}{4}$. Analogt med resultatet ovafor finn vi av symmetrigrunnar at Pitman-effesiensten er lik 1, når problemet er å teste $p_1 = \frac{1}{4}$ mot $p_1 < \frac{1}{4}$. Styrkefunksjonane til dei to-sidige utgåvene av ϕ_1 og ϕ_1^* blir da summen av styrkefunksjonane til dei tilsvarande to ein-sidige testane med nivå $\varepsilon/2$. Vi får derfor at Pitman-effesiensten for den to-sidige utgåva.

ϕ_2 av ϕ_1 , med omsyn på den to-sidige utgåva, ϕ_2^* av ϕ_1^* , blir lik 1.

Av grunnar som nemnt tidlegare, vil det vere informativt å studere deffesiensen for ϕ_2^* m.o.p. ϕ_2 . For å tabellera deffesiensen d_N for ulike verdier av N , treng vi eksakte styrkeutrekningar for dei to testane. Sidan begge testobservatorane er diskret fordelt, må vi innføre randomisering for å oppnå rett nivå.

Testen ϕ_2 er definert ved

$$\phi_{2,N}(x_{11}, x_{1+}, x_{+1}) = \begin{cases} 1 & \text{når } x_{11} < k_1(x_{1+}, x_{+1}) \text{ eller } x_{11} > k_2(x_{1+}, x_{+1}) \\ \gamma_k & \text{når } x_{11} = k_i(x_{1+}, x_{+1}), \quad i = 1, 2 \\ 0 & \text{når } k_1(x_{1+}, x_{+1}) < x_{11} < k_2(x_{1+}, x_{+1}) \end{cases}$$

der k_1, k_2, γ_1 og γ_2 er gitt ved dei to likningane

$$E_H(\phi_{2,N}(X_{11}, X_{1+}, X_{+1}) | x_{1+}, x_{+1}) = \varepsilon$$

$$E_H(X_{11} \phi_{2,N}(X_{11}, X_{1+}, X_{+1}) | x_{1+}, x_{+1}) = \varepsilon E_H X_{11}.$$

Vi finn da for styrkefunksjon til ϕ_2

$$\begin{aligned} \beta(\phi_{2,N}, \lambda) &= E\phi_{2,N}(X_{11}, X_{1+}, X_{+1}) \\ &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{x_{11}=0}^{\min(x_{1+}, x_{+1})} \phi_{2,N}(x_{11}, i, j) f(x_{11}, i, j) \end{aligned}$$

der

$$\lambda = \left(\frac{2p_1}{1-2p_1} \right)^2$$

og

$$f(x_{11}, x_{1+}, x_{+1}) = \frac{\binom{x_{11}}{x_{11}} \binom{x_{+1}-x_{11}}{x_{+1}-x_{11}} \lambda^{x_{11}}}{\sum_{j=0}^{\min(x_{1+}, x_{+1})} \binom{x_{11}}{j} \binom{x_{+1}-x_{11}}{x_{+1}-j} \lambda^j}.$$

Tabell A i Harkness & Katz (1964) inneheld eksakte utrekningar av $\beta(\phi_{2N}, \lambda)$ med nivå $\varepsilon = 0.05$ for ulike verdier av λ når $N = 10, 20, 30$, og er gitt att i tabell 1 nedafor.

Testen ϕ_2^* er definert ved

$$\phi_{2,M}^*(v) = \begin{cases} 1 & \text{når } v < c \text{ eller } v > M-c \\ \gamma & \text{når } v = c \text{ eller } v = M-c \\ 0 & \text{når } c < v < M-c \end{cases}$$

der c og γ er gitt ved likninga

$$\varepsilon = E_H \phi_{2,M}^*(V) = 2\Pr_H(V \leq c-1) + 2\gamma \Pr_H(V=c)$$

ivs. γ er gitt ved

$$\gamma = \frac{\varepsilon/2 - \Pr_H(V \leq c-1)}{\Pr_H(V \leq c) - \Pr_H(V \leq c-1)} = \frac{\varepsilon/2 - B_M(c-1, \frac{1}{2})}{B_M(c, \frac{1}{2}) - B_M(c-1, \frac{1}{2})}$$

$$\text{der } B_M(t, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \sum_{v=0}^t \binom{M}{v}.$$

c vert fastsett som den største verdi slik at

$$B_M(c-1, \frac{1}{2}) \leq \varepsilon/2.$$

Dei to randomiseringssannsyna γ_1 og γ_2 vert like for denne testen, fordi V er symmetrisk fordelt omkring $M/2$ når $p_1 = 1/4$, dvs.

$$\Pr_H(V < M/2 - v) = \Pr_H(V > M/2 + v).$$

Styrkefunksjonen til ϕ_2^* blir da

$$\begin{aligned} \beta(\phi_{2,M}^*, p_1) &= E \phi_{2,M}^*(V) = \sum_v \phi_{2,M}^*(v) g(v) \\ &= \sum_{v=0}^{c-1} g(v) + (1 - \sum_{v=0}^{M-c} g(v)) + \gamma(g(c) + g(M-c)) \\ &= B_M(c-1, p_1) + 1 - B_M(M-1, p_1) \\ &\quad + \gamma[B_M(c, p_1) + B_M(M-c, p_1) - B_M(c-1, p_1) - B_M(M-c-1, p_1)] \end{aligned}$$

$$\text{der } g(v) = \binom{M}{v} (2p_1)^v (1-2p_1)^{M-v}$$

$$\text{og } B_M(t, p_1) = \sum_{v=0}^t g(v).$$

Med nivå $\varepsilon = 0.05$ har vi rekna ut $\beta(\phi_{2,M}^*, p_1)$ eksakt for ulike verdier av M og p_1 . Utrekningane er gitt i tabell 1.

Tabell 1. Styrken til Fisher-Irwins test (ϕ_2) med N observasjoner samanlikna med styrken til NP-testen (ϕ_2^*) med M observasjonar. Nivået $\varepsilon = 0.05$.

Alternativ		N = 10				
		$\phi_{2,M}^*$ -styrken		$\phi_{2,N}$ -styrken		$\phi_{2,8}^* - \phi_{2,10}$
p_1	λ	M=7	M=8	N=10		
.025	0.1	.779	.852	.801		.051
.050	0.2	.595	.688	.647		.041
.075	0.3	.445	.532	.497		.035
.100	0.4	.325	.394	.365		.029
.125	0.5	.232	.280	.258		.022
.150	0.6	.161	.192	.176		.016
.175	0.7	.110	.127	.118		.009
.200	0.8	.076	.083	.079		.004
.225	0.9	.056	.058	.057		.001
.250	1.0	.050	.050	.050		0

Alternativ		N = 20					
		$\phi_{2,M}^*$ -styrken			$\phi_{2,N}$ -styrken		$\phi_{2,18}^* - \phi_{2,20}$
p_1	λ	M=16	M=17	M=18	M=19	N=20	
.025	0.1	.996	.999	.999	.999	.998	.001
.050	0.2	.958	.978	.978	.983	.975	.003
.075	0.3	.858	.902	.903	.919	.899	.004
.100	0.4	.702	.760	.761	.787	.758	.003
.125	0.5	.522	.576	.577	.606	.577	0
.150	0.6	.352	.391	.392	.415	.392	0
.175	0.7	.215	.237	.238	.252	.239	-.001
.200	0.8	.121	.130	.130	.137	.131	-.001
.225	0.9	.067	.069	.069	.071	.069	-.001
.250	1.0	.050	.050	.050	.050	.050	0

N = 30							
Alternativ		$\phi_{2,M}^*$ -styrken				$\phi_{2,N}^*$ -styrken	$\phi_{2,28}^* - \phi_{2,30}$
p_1	λ	M=26	M=27	M=28	M=29	N=30	
.025	0.1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0
.050	0.2	.998	.999	.999	.999	.999	0
.075	0.3	.978	.984	.986	.988	.985	.001
.100	0.4	.901	.921	.924	.933	.923	.001
.125	0.5	.746	.776	.781	.797	.781	0
.150	0.6	.536	.566	.571	.588	.571	0
.175	0.7	.328	.348	.351	.364	.352	-.001
.200	0.8	.170	.179	.180	.187	.181	-.001
.225	0.9	.078	.081	.081	.083	.091	0
.250	1.0	.050	.050	.050	.050	.050	0

Tabellen ovafor gir opphav til følgjande tabell for deffensiensen $d_N = N - r_N$.

Tabell 2. Deffensiensen til Fisher-Irwins test (ϕ_2) relativt til V-testen (ϕ_2^*).

N = 10	N = 20	N = 30
$2.40 \leq d_N \leq 2.70$	$1.86 \leq d_N \leq 3.33$	$1.86 \leq d_N \leq 4.00$

Ved å nytta Fisher-Irwins test får vi i tillegg til eit tap på 2 observasjonar høgst eit styrketap på 0.051, 0.004, 0.001 for N lik respektive 10, 20 og 30.

På grunnlag av resultatata ovafor kan vi slå fast at bruk av Fisher-Irwins test i 2x2-tabellar der vi har apriori kunnskap om fenomenet som vert undersøkt, medfører eit lite effektivitetstap. Eventuelle spesifikasjoner av parametrane i ein 2x2-tabell, når vi skal studera uavhengigheit eller relativ symmetri, vil altså vere lite vinstgivande.

6. Dei sentrale omgrepa i 2x2-tabellar uttrykt ved parametrane i den log-lineære modellen

Log-lineær analyse av tabellar er grundig handsama av Haldorsen, T. (1977b). Når det gjeld inferensproblem, tolkning av parametrane, osv. i samband med log-lineær modellar, så viser vi til denne publikasjonen. I dette kapitlet skal vi omtale korleis dei viktige omgrepa frå kapittel 3 kan uttrykkast ved parametrane i den log-lineære modellen.

Den log-lineære modell er definert ved

$$\log p_{ij} = u + u_1(i) + u_2(j) + u_{12}(i,j), \quad i=1,2; \quad j=1,2$$

der

$$\sum_i u_1(i) = \sum_j u_2(j) = 0, \quad \sum_i u_{12}(i,j) = \sum_j u_{12}(i,j) = 0.$$

u gir uttrykk for ein gjennomsnittseffekt. u_1 og u_2 kan vi tolke som hovudeffektar for respektive variabel A og variabel B, medan u_{12} uttrykker samspeleffekten mellom A og B.

Som i kapittel 2 ser vi på observasjonane i 2x2-tabellen som resultat av ei multinomisk forsøksrekke. Vi får da for parametrane i den log-lineære modellen

$$u = \frac{1}{4}(\log p_{11} + \log p_{12} + \log p_{21} + \log p_{22}) = \log \bar{p}_{..}$$

$$u_1(i) = \frac{1}{2}(\log p_{i1} + \log p_{i2}) - u = \log \frac{\bar{p}_{i.}}{\bar{p}_{..}},$$

$$u_2(j) = \frac{1}{2}(\log p_{1j} + \log p_{2j}) - u = \log \frac{\bar{p}_{.j}}{\bar{p}_{..}},$$

$$u_{12}(i,j) = \log p_{ij} - u_1(i) - u_2(j) - u = \log \frac{p_{ij} \bar{p}_{..}}{\bar{p}_{i.} \bar{p}_{.j}},$$

der

$$\bar{p}_{..} = \left(\prod_{i=1}^2 \prod_{j=1}^2 p_{ij} \right)^{1/4}, \quad \bar{p}_{i.} = \left(\prod_{j=1}^2 p_{ij} \right)^{1/2}, \quad \bar{p}_{.j} = \left(\prod_{i=1}^2 p_{ij} \right)^{1/2}$$

og

$$p_{ij} = \Pr(A_i \cap B_j).$$

Ved å nytte definisjonane i avsnitta 3.1., 3.2. og 3.d., får vi

(i) uavhengigheit viss og berre viss $u_{12}(i,j) = 0$.

(ii) symmetri viss og berre viss

$$u_1(i) + u_2(j) + u_{12}(i,j) = u_1(j) + u_2(i) + u_{12}(j,i), \quad i \neq j.$$

I ein modell med symmetri har vi derfor

$$u_1(i) = u_2(i) \quad \text{og} \quad u_{12}(i,j) = u_{12}(j,i), \quad i \neq j.$$

(iii) relativ symmetri (3.6) viss og berre viss

$$u_2(j) = 0, \quad j=1,2.$$

(iv) relativ symmetri (3.7) viss og berre viss

$$u_1(i) = 0, \quad i=1,2.$$

Dei generelle metodane som er utvikla for analyse av parametrane i log-lineære modellar, er asymptotiske og dessutan avgrensa til å gjelde for hierarkiske modellar (sjå f.eks. Haldorsen (1977b)). Vi kan derfor ikkje nytta ECTA (program som er i bruk i Byrået) til f.eks. å studere samspelet u_{12} under ein modell med relativ symmetri, medan dette let seg gjere ved hjelp av resultatata frå kapittel 2.

I kapittel 5 studerte vi samspelet under modellen ($p_{11}=p_{22}$, $p_{12}=p_{21}$) ved hjelp av to ulike metodar. Denne modellen uttrykt ved dei log-lineære parametrane blir

$$u_1(i) = u_2(j) = 0,$$

dvs.

$$\log p_{ij} = u + u_{12}(i,j)$$

der

$$\sum_i u_{12}(i,j) = \sum_j u_{12}(i,j) = 0.$$

Modellen er derfor ikkje hierarkisk, og dermed kan heller ikkje ECTA nyttast som verktøy til å analysere samspelet u_{12} .

Vedlegg 1. Analyse av 2x2-tabellar når observasjonane er Poisson-fordelte

I kapittel 2 såg vi på 2x2-tabellen som resultat av ei multinomisk forsøksrekke. Utvalstorleiken N var fast. Sidan vi i Statistisk Sentralbyrå nyttar register for trekking av utval, vil utvalstorleiken vere fastsett på førehand. Innafor ei rekkje forskningsmiljø (f.eks. medisin) har ein ikkje denne føremonen. Observasjonane blir som oftast henta inn på ein slik måte at også den totale utvalstorleiken er ein stokastisk variabel. Hvis vi plukkar ut ein tabell frå eit større materiale, kan vi også i Byrået komme i den situasjonen som er omtala ovafor. Vi ser da på observasjonane frå kvar av cellene i 2x2-tabellen som uavhengige Poisson-fordelte variable. Vi får altså tabellen

	B ₁	B ₂	SUM
A ₁	X ₁₁	X ₁₂	X ₁₊
A ₂	X ₂₁	X ₂₂	X ₂₊
SUM	X ₊₁	X ₊₂	X ₊₊

der $X_{ij} \sim \text{Poisson}(\lambda_{ij})$, $i=1,2$; $j=1,2$.

λ_{ij} blir sett på som eit mål for den intensitet $A_i \cap B_j$ opptrer med. Vi får da for simultanfordelinga til X-ane

$$(1) \quad \Pr\left(\bigcap_{i,j} (X_{ij}=x_{ij})\right) = \prod_{i=1}^2 \prod_{j=1}^2 \left(\frac{\lambda_{ij}^{x_{ij}}}{x_{ij}!} e^{-\lambda_{ij}}\right).$$

Modell (2.1) i kapittel 2, kan vi sjå på som ein betinga Poisson-modell gitt X_{++} . Vi finn da for $p_{ij} = \Pr(A_i \cap B_j)$ uttrykt ved parametrane i Poisson-modellen (1)

$$p_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{++}}, \quad i=1,2; \quad j=1,2$$

der

$$\lambda_{++} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \lambda_{ij}.$$

La \mathcal{P} vere fordelingsklassen definert ved (1). \mathcal{P} er eksponensiell sidan vi for einkvar $P \in \mathcal{P}$ har at

$$(2) \quad dP = (\exp(4 - \lambda_{++})) \left(\exp\left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 x_{ij} \log \lambda_{ij} \right) \right) dP_0$$

der P_0 er sannsynfordelinga svarande til $\lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{21} = \lambda_{22} = 1$.

La

$$(3) \quad \theta_{ij} = \log \lambda_{ij}, \quad i=1,2; \quad j=1,2$$

dvs.

$$\lambda_{ij} = \exp(\theta_{ij}), \quad i=1,2; \quad j=1,2.$$

La $\Theta = \theta(\mathcal{P})$, $\theta = (\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{21}, \theta_{22})'$.

Avbildinga $P \longrightarrow \theta(P)$, $P \in \mathcal{P}$, er ein-eintydig og $\dim \Theta = 4$. Dette gir at parametriseringa $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ gitt ved

$$(4) \quad dP_\theta = a(\theta) \exp\left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 x_{ij} \theta_{ij} \right) dP_0$$

der $a(\theta) = \exp\left(4 - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \exp(\theta_{ij})\right)$,

er minimal kanonisk representasjon av \mathcal{P} .

Sidan $\Theta = \mathbb{R}^4$, er Θ ei open mengd. Vi har derfor at den eksponensielle fordelingsklassen \mathcal{P} er regulær. Som i kapittel 2 skal vi avgrense oss til å undersøke regulære hypotesar \mathcal{P}_0 . Vidare ønskjer vi å studere problem som er definert ved ein parameter, γ . Dette kan vi gjere ved å studer γ gitt ved

$$(5) \quad \gamma u + v = B\theta$$

der $\gamma \in \mathbb{R}$, $\theta \in \Theta$, B er ei $r \times 4$ matrise med rang r ; $r=1,2,3,4$, u og v vektorar med dimensjon r og $u \neq 0$.

Dette vil seie at $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_{\gamma, B}$; $\gamma \in \mathbb{H}$, der $\mathcal{P}_{\gamma, B}$ er definert ved

$$\mathcal{P}_{\gamma, B} = \{P_{\theta} : B\theta = v + \gamma u\},$$

er affin og dermed regulær.

Vi kan derfor nytte Setning 1, som gir eksistensen av O.A.S.S. testar med nivå ε for å teste H_1, H_2, H_3 og H_4 mot respektive A_1, A_2, A_3 og A_4 . H_j og A_j , $j=1,2,3,4$ er definert i kapittel 2.

Vi skal no etablere testar for hypotesen $\gamma = 0$ mot alternativa $\gamma > 0$, dvs. problem av typen H_1, A_1 . Ved å setje inn for $x_{22} = x_{++} - x_{11} - x_{12} - x_{21}$ og (5) i (4) får vi

$$(6) \quad dP_{\theta} = a(\theta) \exp(\gamma(\theta)T(x) + \sum_{i=1}^3 \tau_i(\theta)Y_i(x)) dP_0.$$

Funksjonsformene til $\gamma, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ og dermed til T, Y_1, Y_2, Y_3 kjem fram ved fastsetjing av B, v og u . Analogt med Setning 2, gir teorem 3 (kap. 4), Lehmann (1959),

Setning 3. La X ha fordeling gitt ved (1) og la γ vere gitt ved (5). For å teste $H : \gamma = 0$ mot $A : \gamma > 0$ så eksisterer det ein overalt sterkaste styrkerett (O.A.S.S.) test δ med nivå ε . Testen er definert ved

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } T(x) > k(y_1, y_2, y_3) \\ \mu & \text{hvis } T(x) = k(y_1, y_2, y_3) \\ 0 & \text{hvis } T(x) < k(y_1, y_2, y_3) \end{cases}$$

der k og μ er gitt ved

$$E_H(\delta(X) | y_1, y_2, y_3) = \varepsilon.$$

Om vi ønskjer å studere uavhengigheit i tabellen under modellen (1), kan vi gjere dette ved å teste hypotesen $\gamma = 0$ mot alternativa $\gamma > 0$, der γ er gitt ved

$$\gamma = \log \left(\frac{\lambda_{11}\lambda_{22}}{\lambda_{12}\lambda_{21}} \right)$$

dvs.

$$\gamma = \theta_{11} + \theta_{22} - \theta_{12} - \theta_{21}.$$

I denne situasjonen blir derfor

$$B = (1, -1, -1, 1), \quad v=0, \quad u=1$$

og vi får for (6)

$$(7) \quad dP_{\theta} = a(\theta) \exp(x_{11}^{\gamma+x_{1+}^{\theta}+x_{12}^{\theta}+x_{+1}^{\theta}+x_{21}^{\theta}+(x_{++}-x_{1+}-x_{+1})^{\theta}+x_{22}^{\theta})dP_0 .$$

Dermed gir Setning 3 at testen som forkastar $H : \gamma = 0$ mot $A : \gamma > 0$ når

$$X_{11} > k(X_{1+}, X_{+1}, X_{++})$$

er O.A.S.S. test med nivå ε . k vert fastsett slik at

$$\sum_{j=k+1}^{\min(x_{1+}, x_{+1})} g(j | x_{1+}, x_{+1}, x_{++}) + \mu g(k | x_{1+}, x_{+1}, x_{++}) = \varepsilon$$

der

$$g(x_{11} | x_{1+}, x_{+1}, x_{++}) = \frac{\binom{x_{+1}}{x_{11}} \binom{x_{++}-x_{+1}}{x_{1+}-x_{11}}}{\binom{x_{++}}{x_{1+}}}$$

og $0 \leq \mu \leq 1$.

Prosedyrane blir altså den same som den vi utvikla for uavhengigheit i kap. 3.1. For å teste symmetri og relativ symmetri under modellen (1), får vi tilsvarande at prosedyrane i respektive kap. 3.2. og kap. 3.3. kan nyttast. Styrkefunksjonane til testen under dei to ulike modellane blir naturlegvis ikkje like.

Vedlegg 2. Tre-desisjonsproblem

Den klassiske hypoteseprøvingsteorien omtalar metodar for val mellom to avgjerder; enten å forkaste eller ikkje å seie noko. Det er slike situasjonar vi har handsama ovafor. For mange situasjonar i samband med tabellanalyse, vil det vere naturleg å formulere problema som tre-desisjonsproblem. Som ovafor (kap. 2 og kap. 3) skal vi studere parameteren γ . Vi ønskjer å avgjere når $\gamma < 0$ eller > 0 , dvs. vi har val mellom tre avgjerder (desisjonar):

$A_1 =$ påstå $\gamma < 0$, $A_2 =$ påstå $\gamma > 0$, $A_3 =$ ikkje seie noko.

La observasjonsmaterialet X ha fordeling P , der $P \in \mathcal{P}$ er gitt ved (2.1). Vi definerer no den statistiske metode ψ ved

$\psi_i(X) =$ betinga sannsynet for å velje A_i gitt X ,

der
$$\sum_{i=1}^3 \psi_i(X) = 1.$$

Vi skal leggje følgjande krav på metoden:

(i) Nivået skal vere ε , dvs. sannsyna for feilaktig å påstå $\gamma < 0$ og feilaktig å påstå $\gamma > 0$ skal vere høgst ε .

$$E_P \psi_1(X) \leq \varepsilon \quad \text{når } \gamma \geq 0.$$

$$E_P \psi_2(X) \leq \varepsilon \quad \text{når } \gamma \leq 0.$$

(ii) Prestasjonsretteit, dvs. sannsyna for rett utsegn skal vere minst ε .

$$E_P \psi_1(X) \geq \varepsilon \quad \text{når } \gamma < 0.$$

$$E_P \psi_2(X) \geq \varepsilon \quad \text{når } \gamma > 0.$$

Blant alle ψ som tilfredsstillar (i) og (ii), ønskjer vi å finne ein ψ som maksimerer $E_P \psi_1(X)$ for $\gamma < 0$ og $E_P \psi_2(X)$ for $\gamma > 0$.

Dersom vi ser bort i frå kravet $\sum_{i=1}^3 \psi_i = 1$, har vi i røynda to separate to-desisjonsproblem om å finne to overalt sterkaste styrkerette testar ψ_1 og ψ_2 . I kap. 2 og kap. 3 har vi etablert O.A.S.S. testar som er slik at $\psi_1 + \psi_2 \leq 1$ for alle X . Vi set difor $\psi_3 = 1 - \psi_1 - \psi_2$ og har dermed oppnådd desisjonsreglar ψ som er best blant alle prestasjonsrette desisjonsreglar med nivå ϵ .

Vi har den situasjonen som vart omtala i kap. 3.2., men ønskjer no å studere "symmetri" formulert som tre-desisjonsproblem. La ψ_1 og ψ_2 vere definert som ovafor. Da kan vi sjå på ψ_2 som ein test for hypotesen $\gamma \leq 0$ mot alternativa $\gamma > 0$. I kap. 3.2. etablerte vi ein O.A.S.S. test for dette problemet. Den gikk ut på å påstå $\gamma > 0$ dersom $X_{12} > k_1(W)$. Tilsvarende kan ψ_1 bli oppfatta som ein test for hypotesen $\gamma \geq 0$ mot alternativa $\gamma < 0$. Analogt med ψ_2 , finn vi at ψ_1 som forkastar hypotesen når $X_{12} < k_2(W)$ er O.A.S.S. test. Ved å la $\psi_3 = 1 - \psi_1 - \psi_2$, har vi at desisjonsregelen ψ definert ved ψ_1 , ψ_2 og ψ_3 er den beste blant alle prestasjonsrette desisjonsreglar med nivå ϵ .

I praksis vil vi bruke desisjonsregelen på følgjande måte:

Vi påstår $\gamma < 0$ eller $\gamma > 0$ alt ettersom

$$G_2(X_{12}|W) = \sum_{j=0}^{X_{12}} g_2(j|W) < \epsilon.$$

eller

$$G_2(X_{12}^{-1}|W) = \sum_{j=0}^{X_{12}^{-1}} g_2(j|W) > 1-\epsilon.$$

Eksempel 6. Frå Upton, G.J.G. (1978) har vi

Tabell 6. Personar med stemmerett klassifisert etter kategoriane stemde konservativ (K) - stemde ikkje konservativ (\bar{K}), ved parlamentsvala (Storbritannia) i februar 1974 og oktober 1974.

Okt. 1974	K	\bar{K}	Sum
Feb. 1974			
K	275	46	321
\bar{K}	52	523	575
Sum	327	569	896

Tabell 6 er frå eit panel-utval på 896 personar. For kvar av personane i utvalet har vi opplysningar om stemmegivinga ved dei to vala. Vi ønskjer å studere "symmetri" ved hjelp av den tilnærma utgåva (sjå kap. 4) av tre-desisjonsregelen som blei presentert ovafor. Vi krev nivået $\epsilon = 0.05$ og finn $G_2(46|W) \approx \Phi(-0.51) = 0.305$ ($G_2(45|W) \approx \Phi(-0.61) = 0.271$). Vi kan altså verken påstå $\gamma < 0$ eller $\gamma > 0$.

Når samfunnsvitarar skal studere endringar frå eit val til eit anna, vil dei ofte sjå på utfallet av det første valet som gitt. Dei vil dermed sjå på eventuelle endringar i relasjon til resultatata frå det første valet. Dette kan vi få gjort ved å studere "relativ symmetri" (3.6) ved hjelp av den tilnærma utgåva (sjå kap. 4) av den optimale tre-desisjonsregelen. Vi krev nivået $\epsilon = 0.05$ og finn $G_3(275|X_{1+}, L) \approx \Phi(-2.32) = 0.010$. Vi kan derfor påstå $p_{12}/p_{1+} > p_{21}/p_{2+}$, dvs. det relative talet på overgangar frå konservative til ikkje-konservative er større enn det relative talet på overgangar frå ikkje-konservative til konservative.

Vedlegg 2 er stort sett utdrag frå Sverdrup (1976) og (1979). Tre-desisjonsproblemet i relasjon til klassisk hypoteseprøving er blitt grundig handsama i desse to publikasjonane og i Sverdrup (1977).

Referanser:

- Anderson, T.W. (1958): An Introduction to Multivariate Statistical Analysis. Wiley.
- Barndorff-Nielsen, O. (1970): Exponential Families. Exact Theory. Various Publications Series No. 19. Matematisk Institutt, Aarhus Universitet.
- Bishop, Y.M.M., Fienberg, S.E. & Holland, P.W. (1975): Discrete Multivariate Analysis. Theory and Practice. The MIT Press.
- Haldorsen, T. (1977a): "Testing i tabeller". IO 77/41. Statistisk Sentralbyrå.
- Haldorsen, T. (1977b): "Om log-lineær analyse av flerveistabeller". IO 77/46 Statistisk Sentralbyrå.
- Hajek, J. & Sidak, Z. (1967): Theory of Rank Tests. Academic Press.
- Harkness, W.L. & Katz, L. (1964): "Comparison of the power functions for the test of independence in 2x2 contingency tables". Ann. Math. Statist. 35, 1115-1127.
- Hodges, J.L. & Lehmann, E.L. (1970): "Deficiency". Ann. Math. Statist. 41, 783-801.
- Lehmann, E.L. (1959): Testing Statistical Hypotheses. Wiley.
- Sverdrup, E. (1976): "Significance Testing in Multiple Statistical Inference". Scand. J. Statist. 3, 73-78.
- Sverdrup, E. (1977): "The Logic of Statistical Inference. Significance Testing and Decision Theory". Statistical Research Report No. 7. Institute of Mathematics, University of Oslo.
- Sverdrup, E. (1979): "Testing av statistiske hypoteser. Neymann-Pearsons generelle teori". Statistical memoris. Matematisk institutt. Universitetet i Oslo.
- Upton, G.J.G. (1978): "A note on the estimation of voter transition probabilities". J.R. Statist. Soc. A, 141, 507-512.

Utkome i serien Rapportar frå Statistisk Sentralbyrå (RAPP)

- Nr. 79/1 Hans Viggo Sæbø: Energibruk etter formål ISBN 82-537-0992-7
- " 79/2 Viggo Jean-Hansen: Det norske nasjonalregnskapet Dokumentasjonsnotat nr. 7 Sektorberegninger for samferdselssektorene og reparasjon av kjøretøyer m.v. ISBN 82-537-0968-4
- " 79/3 Jon Blaalid: Undersøkelse av renholdsbedrifter 1977 ISBN 82-537-0969-2
- " 79/4 Anne Lise Ellingsæter: Deltidsundersøkelsen 1978 ISBN 82-537-0970-6
- " 79/5 Grete Dahl: Boligutgiftsbegrepet i forbruksundersøkelsene En metodestudie ISBN 82-537-0971-4
- " 79/6 Charlotte Koren: MAFO-Makromodell for folketrygden En skisse av en budsjettmodell ISBN 82-537-0972-2
- " 79/7 Odd Skarstad: Estimering av inntektsderiverte på tverrsnittsdata med målefeil ISBN 82-537-0976-5
- " 79/8 Svein Røgeberg: Det norske nasjonalregnskapet Dokumentasjonsnotat nr. 14 Sektorberegninger for fiske og fangst ISBN 82-537-0977-3
- " 79/9 Statsansattes vurdering av arbeidsforholdene i staten 1977 ISBN 82-537-0954-4
- " 79/10 ØMI-statistikk for alminnelige somatiske sykehus ISBN 82-537-0985-4
- " 79/11 Nils Martin Stølen: Substitusjonsmuligheter mellom energivarer Med et Appendiks av Steinar Strøm og Nils Martin Stølen ISBN 82-537-0990-0
- " 79/12 Skatter og overføringer til private Historisk oversikt over satser m.v. Årene 1969-1979 ISBN 82-537-0978-1
- " 79/13 Helge Herigstad: Forbruksundersøkinga 1967-1977 samanlikna med nasjonalrekneskapen ISBN 82-537-1001-1
- " 79/14 Jon Blaalid: Oppgavebyrden for små bedrifter ISBN 82-537-0995-1
- " 79/15 Leif Korbøl og Svein Røgeberg: Det norske nasjonalregnskapet Dokumentasjonsnotat nr. 3 Sektorberegninger for jordbruk og skogbruk ISBN 82-537-1003-8
- " 79/16 Helge Herigstad: Forbrukseiningar ISBN 82-537-0994-3
- " 79/17 Morten Reymert: Makro-økonomiske virkningar for Norge av økte råvarepriser ISBN 82-537-1011-9 ISSN 0332-8422
- " 79/18 Helge Herigstad: Utgifter til reiser og transport i forbruksundersøkinga og nasjonalrekneskapen ISBN 82-537-
- " 79/19 Lars Kristofersen: Dødelighet 1970-1973 etter yrke 1960 og 1970
- " 79/20 Rolf Aaberge: Eksakte metodar for analyse av 2x2-tabellar ISBN 82-537-

Pris kr 9,00

Publikasjonen utgis i kommisjon hos H. Aschehoug & Co. og
Universitetsforlaget, Oslo, og er til salgs hos alle bokhandlere.

ISBN 82-537-1048-8
ISSN 0332-8422